学術刊行物　ISSN 0919-9985

日本航海学会誌 NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

水中翼の造波シミュレーション

堀　　勉

Simulation Study of Water Wave Generation Caused by Running 2-D Hydrofoil

Tsutomu HORI

平成28年
4月
第196号

研究・調査

水中翼の造波シミュレーション

堀　　勉

Simulation Study of Water Wave Generation Caused by Running 2-D Hydrofoil

Tsutomu HORI

キーワード：　*水中翼，造波グリーン関数，シミュレーション，水面波形，NACA 翼型*

1．緒　言

近年，盛んに開発されるようになった高速艇や海洋観測用の曳航体等には，水中翼を装着した例が多く見受けられる。その水中翼が，水面近くを高速航走する際に生じる造波現象 [(1),(2),(3)] を，定量的に捉えておくことも，水中翼の流力性能を評価する上で，重要な課題であると考えられる。

このような状況に鑑み，本稿では， 水中翼が高速航走する際の造波シミュレーションを実施する。解析は，2 次元渦糸による造波グリーン関数を構築することにより，それを核関数に採用して，境界要素法的な手法を用いて行なう。

シミュレーション計算を実施した結果，造波現象に及ぼす翼の形状や前進速度，没水深度，迎角等の依存性について，具体的な知見を得たので，2 次元翼ではあるが，今後の水中翼の基礎資料に供する部分もあると考え，ここにご報告し，諸賢のご批判を仰ぐ次第である。

2．渦糸による造波グリーン関数

2 次元 水中翼の境界値問題を設定する。座標系は，図 1 に示すように，静止水面上に原点 o を配し，一様な流れ方向に x 軸，鉛直上向きに z 軸を取る。

弦長 c の水中翼が，自由表面を有する流速 U の流れの中，密度 ρ の流体中に，没水深度 f の位置に迎角 α の状態で置かれているとする。

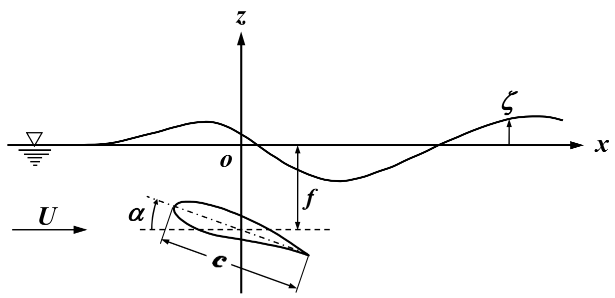

図 1　水中翼の座標系

2. 1　境界値問題

水中翼による波動場の速度ポテンシャル Φ を，

$$\Phi(x, z) = Ux + \phi(x, z) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

のように，一様流のポテンシャル Ux と攪乱ポテンシャル ϕ の重畳で構成する。以下，その攪乱ポテンシャル ϕ が満足すべき条件について考える。

まず, 流場の連続条件から, 支配方程式として，水面下の全領域で，

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (for \;\; z \le \zeta) \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

なるラプラスの方程式を満たす必要がある。ここに，ζ は生成される波の変位を表わす。

次に，水面上$(z=\zeta)$では，線型自由表面条件が適用できるとして，静止水面上$(z=0)$で，

$$[F]\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\kappa_0\frac{\partial\phi}{\partial z}+\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \quad (on\ z=0)$$

$$\text{但し，}\begin{cases}\kappa_0=\dfrac{g}{U^2}=\dfrac{1}{Fn^2c}\\ \mu\to+0\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

が課せられる。式中のκ_0は波数，Fnはフルード数，μは上流$(x\to-\infty)$には波が生成されない放射条件を数学的に満足させる為の*Rayleigh*の仮想摩擦係数である。

また，水底では無限水深の仮定から，

$$[B]\quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_{z=-\infty}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

のように，攪乱が消失することが要請される。

一方，翼面上での境界条件は，翼表面に立てた外向きの単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}=n_x\boldsymbol{i}+n_z\boldsymbol{k}$とするとき，流れの法線方向成分が $(U\boldsymbol{i}+\nabla\phi)\bullet\boldsymbol{n}=0$ のようにゼロになる必要があるから，攪乱ポテンシャルϕに関しては，

$$[H]\quad \frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial z}n_z=-Un_x \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

を満たすことが課せられる。また，翼後縁では，翼の正面と背面での流れが滑らかに接合する，

$$[K]\quad Kutta\ Condition\ (at\ Trailing\ Edge)\cdots\cdots(6)$$

を満足する必要がある。

実際には，上記の条件$[L],[F],[B]$を満足する 2 次元渦糸による造波グリーン関数Gを，次節で構築し，時計回りの強さΓ_jの渦糸を翼表面上$(\xi_j,-f_j)$に離散的にn個分布させることにより，

$$\phi(x,z)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j G(x,z\,;\xi_j,-f_j) \quad \cdots\cdots(7)$$

の形で，攪乱速度ポテンシャルϕを構成する。このとき，x,zそれぞれの方向の誘導速度は，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\partial G(x,z\,;\xi_j,-f_j)}{\partial x}\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}&=-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\partial G(x,z\,;\xi_j,-f_j)}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

によって，計算できることになる。

翼面上での境界条件式$[H]$を満足するように，渦強さΓ_jを，3 章に示す手法で数値的に求解することにより，境界値問題を解く。

2. 2　造波グリーン関数

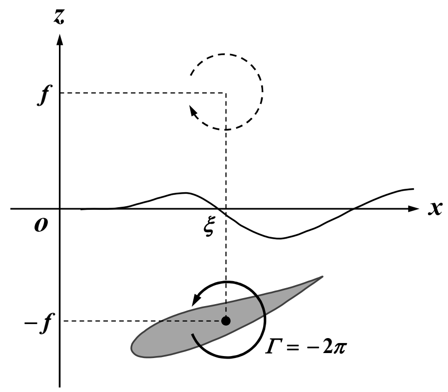

図 2　渦糸による造波グリーン関数

没水深度fの位置$(\xi,-f)$に置かれた反時計回りの 2 次元渦糸の造波グリーン関数Gを，

$$\begin{aligned}G(x,z)&=\theta+G'(x,z)\\ &=\tan^{-1}\frac{z+f}{x-\xi}+G'(x,z;\xi,-f)\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

の形で構成する。ここに，主要解θは，水面を含む$z+f>0$の領域に対して，形式的に，

$$\theta=\tan^{-1}\frac{z+f}{x-\xi}=-\mathrm{Im}\left[\int_0^\infty e^{-k(z+f)+ik(x-\xi)}\cdot\frac{dk}{k}\right]\cdots(10)$$

のようにフーリエ積分表記できるから，正則部G'についても，(4)式の水底条件$[B]$を満足する形で，

$$G'=\mathrm{Im}\left[\int_0^\infty\psi(k)\,e^{kz+ikx}dk\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

のように仮定し，(3)式の水面条件$[F]$を満足するように，未定の核関数$\psi(k)$を決定すると，

$$\psi(k)=\left(-\frac{1}{k}+\frac{2}{k-\kappa_0-i\mu}\right)\cdot e^{-kf-ik\xi} \quad \cdots\cdots(12)$$

となる。これを，(11)式のG'に入れ戻すと，

$$\begin{aligned}G'=&-\mathrm{Im}\left[\int_0^\infty e^{-k(f-z)+ik(x-\xi)}\cdot\frac{dk}{k}\right]\\ &+2\,\mathrm{Im}\left[\int_0^\infty\frac{1}{k-(\kappa_0+i\mu)}e^{-k(f-z)+ik(x-\xi)}dk\right]\cdots(13)\end{aligned}$$

と書ける。第 1 項については，水面下では$f-z>0$であるから(10)式と同様な関係から，逆正接関数で表現できる。第 2 項については，kに関する積分を複素平面$k+im$上に拡げて評価する。積分経路は，下流側$x-\xi>0$に対しては第 1 象限を，上

流側 $x-\xi<0$ に対しては第 4 象限を周回すれば，それぞれ無限遠での積分は消失するから，実軸上 k に関する積分を，虚軸上 m に関する積分に移し替えることができる[4]。その際，1 位の極 $\kappa_0+i\mu$ は第 1 象限に位置することから，留数は下流側の $x-\xi>0$ に対してのみ生ずることになり，仮想摩擦係数を $\mu\to+0$ とし，$x-\xi$ の正負の場合を纏めて表記すれば，

$$G'=\tan^{-1}\frac{f-z}{x-\xi}+2\,\mathrm{Im}\left[\begin{array}{l}\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\cdot\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-m|x-\xi|-im(f-z)}}{m+i\kappa_0}\,dk\\ \quad+\pi i\,e^{-\kappa_0(f-z)+i\kappa_0(x-\xi)}\cdot\left\{1+\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\right\}\end{array}\right]\quad\cdots\cdots(14)$$

と書くことができる。更に，m に関する積分を，

$$\left.\begin{array}{l}w=(m+i\kappa_0)Y\\ \quad\text{但し，}\quad Y=|x-\xi|+i\,(f-z)\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(15)$$

と置いて，複素変数 w に置換することにより，

$$G'=-\tan^{-1}\frac{z-f}{x-\xi}+2\,\mathrm{Im}\left[e^{i\kappa_0Y}\int_{i\kappa_0Y}^\infty\frac{e^{-w}}{w}\,dw\right]\cdot\mathrm{sgn}\,(x-\xi)+2\pi\,e^{-\kappa_0(f-z)}\cos\kappa_0(x-\xi)\cdot\left\{1+\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

と書ける。第 1 項は鏡像位置 $(\xi,\,f)$ に置かれた時計回りの正鏡像渦 θ' を，第 3 項は下流側 $(x-\xi>0)$ にのみ生成される後続自由波を表わしている。第 2 項の積分項は，積分指数関数 E_1 に相当するから，正則部 G' は，

$$G'=-\theta'+2\,\mathrm{Im}\left[e^{i\kappa_0Y}E_1(i\kappa_0Y)\right]\cdot\mathrm{sgn}\,(x-\xi)+2\pi\,e^{\kappa_0(z-f)}\cos\kappa_0(x-\xi)\cdot\left\{1+\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\right\}\quad\cdots(17)$$

のように，表記することができる。

結果，求めるグリーン関数 G は，主要解 θ に，(17)式の G' を加えることにより，

$$\begin{aligned}G&=\tan^{-1}\frac{z+f}{x-\xi}-\tan^{-1}\frac{z-f}{x-\xi}\\&\quad+2\,\mathrm{Im}\left[e^{i\kappa_0Y}E_1(i\kappa_0Y)\right]\cdot\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\\&\quad+2\pi\,e^{\kappa_0(z-f)}\cos\kappa_0(x-\xi)\cdot\left\{1+\mathrm{sgn}\,(x-\xi)\right\}\\&\equiv G_r+G_\ell+G_f\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)\end{aligned}$$

のように書き表わされる。第 1 項の主要解と第 2 項の正鏡像渦を加えたものを G_r と記し，両者で水面での剛壁条件を満足する。第 3 項が局部攪乱波 G_ℓ，第 4 項が後続自由波 G_f に相当する。

第 3 項 G_ℓ 中の E_1 は，複素域に拡張された積分指数関数であり，

$$\left.\begin{array}{l}E_1(i\kappa_0Y)=\displaystyle\int_{i\kappa_0Y}^\infty\frac{e^{-w}}{w}\,dw\\ \quad\text{但し，}\quad i\kappa_0Y=-\kappa_0(f-z)+i\kappa_0|x-\xi|\\ \qquad\qquad\qquad\equiv-\kappa_0\hat{f}+i\kappa_0|\hat{x}|\end{array}\right\}\cdots\cdots(19)$$

によって計算できる。ここに，$\hat{f}\equiv f-z>0$，$\hat{x}\equiv x-\xi$ と略記したものである。

2. 3　領域分割による $E_1(i\kappa_0Y)$ の計算法

前節(19)式の積分指数関数

$$\left.\begin{array}{l}E_1(\eta)=\displaystyle\int_\eta^\infty\frac{e^{-w}}{w}\,dw\\ \quad\text{但し，}\quad\eta=i\kappa_0Y=\kappa_0Re^{i\Theta}\\ \qquad\qquad\left(\text{但し，}\ \dfrac{3}{2}\pi<\Theta<\pi\right)\end{array}\right\}\cdots(20)$$

を，テーラー展開，連分数展開，漸近展開の 3 種類の展開形によって，以下のように計算する。

a) テーラー展開

(20)式で定義される $E_1(\eta)$ の複素平面 $w=u+iv$ 上の経路を，実軸上の $u=0,1$ を経由して積分する表記にすれば，

$$\begin{aligned}E_1(\eta)&=\int_\eta^1\frac{1}{w}\,dw-\int_0^\eta\frac{e^{-w}-1}{w}\,dw\\&\quad-\left(\int_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}\,du-\int_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du\right)\\&=-\log_e\eta-I_2(\eta)-I_{3,4}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)\end{aligned}$$

のように，第 1 項は対数項となるから，第 2 項を I_2，小括弧で括る第 3, 4 項を $I_{3,4}$ と記したものである。

ここに，I_2 については，被積分関数中の e^{-w} は，

$$e^{-w}=1+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\frac{w^n}{n!}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

のようにテーラー展開できるから，級数を項別積分することにより，I_2 は，

$$I_2=\sum_{n=1}^\infty\left\{\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\eta w^{n-1}\,dw\right\}=\sum_{n=1}^\infty\left\{(-1)^n\frac{\eta^n}{n\cdot n!}\right\}\cdots(23)$$

となる。 次に，$I_{3,4}$ については，被積分関数中の e^{-u} を，

$$e^{-u}=\left(\frac{1}{e}\right)^u=\left\{\lim_{n'\to\infty}\left(1-\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right\}^u=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\cdots(24)$$

で計算することにすれば，$I_{3,4}$ は，

$$I_{3,4}=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n\frac{1-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n}{u}du-\int_1^n\frac{1}{u}du\right\}\cdots(25)$$

のように変形できる。上式の第 2 項は対数項となり，第 1 項については，$\tau=1-\dfrac{u}{n}$ と置換した後，有限級数に展開して，項別積分すれば，

$$\begin{aligned}I_{3,4}&=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1\frac{1-\tau^n}{1-\tau}d\tau-\log_e n\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^n\left(\int_0^1\tau^{j-1}d\tau\right)-\log_e n\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}-\log_e n\right\}=\gamma\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(26)\end{aligned}$$

となって，$I_{3,4}$ は，オイラー定数 $\gamma\ (=0.5772156\cdots)$ であることが分かる。

したがって，(21)式の $I_2, I_{3,4}$ に，(23), (26)式の結果を代入すれば，$E_1(\eta)$ は，

$$E_1(\eta)=-\gamma-\log_e\eta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\eta)^n}{n\cdot n!}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

のように，テーラー展開できる。ここに，(20)式の定義から，$\eta=\kappa_0Re^{i\Theta}$ であるから，

$$\left.\begin{aligned}R&=\sqrt{\hat{x}^2+\hat{f}^2}\\\Theta&=\tan^{-1}\left(\frac{|\hat{x}|}{-\hat{f}}\right)\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

であることを用いて，実部 E_C と虚部 E_S に分離して表記すれば，

$$\begin{aligned}E_1(\eta)&=-\gamma-\log_e\kappa_0R-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa_0{}^nR^n}{n\cdot n!}\cdot\cos n(\Theta+\pi)\\&\quad+i\left\{-\Theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\kappa_0{}^nR^n}{n\cdot n!}\cdot\sin n(\Theta+\pi)\right\}\\&\equiv E_C+iE_S\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)\end{aligned}$$

を得る。今後の計算の便を図る為，この $E_1(\eta)$ に e^η を乗じ，その実部 H_C，虚部 H_S を，それぞれ

$$\begin{aligned}e^\eta E_1(\eta)&=e^{-\kappa_0\hat{f}}(E_C\cos\kappa_0|\hat{x}|-E_S\sin\kappa_0|\hat{x}|)\\&\quad+ie^{-\kappa_0\hat{f}}(E_C\sin\kappa_0|\hat{x}|+E_S\cos\kappa_0|\hat{x}|)\\&\equiv H_C(\eta)+iH_S(\eta)\qquad\cdots\cdots\cdots(30)\end{aligned}$$

のように定義する。

b) 連分数展開

Abramowitz の数学関数ハンドブック[5]によれば，(20)式の $E_1(\eta)$ は，

$$E_1(\eta)=e^{-\eta}\left(\frac{1}{\eta+}\frac{1}{1+}\frac{1}{\eta+}\frac{2}{1+}\frac{2}{\eta+}\frac{3}{1+}\frac{3}{\eta+}\cdots\cdots\frac{n}{1+}\frac{n}{\eta+}\cdots\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots(31)$$

のように，連分数展開できる。具体的には，

$$e^\eta E_1(\eta)=\frac{1}{\Omega_1}=\cfrac{1}{\eta+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Omega_2}}}=\cfrac{1}{\eta+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\eta+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\Omega_3}}}}}$$
$$=\cfrac{1}{\eta+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\eta+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{\eta+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{\Omega_4}}}}}}}\qquad\cdots\cdots\cdots(32)$$

のように，昇順 ($n\to n+1$) に展開できる。式中の Ω_n は，

$$\Omega_n=\eta+\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{\Omega_{n+1}}}\equiv\varepsilon_n+i\delta_n\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

で定義していて，(20)式により $\eta=-\kappa_0\hat{f}+i\kappa_0|\hat{x}|$ であるから，Ω_n の実部 ε_n，虚部 δ_n は，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_n&=-\kappa_0\hat{f}+\frac{n\,(n\varepsilon_{n+1}+\ell_{n+1}^2)\cdot\ell_{n+1}^2}{(n\varepsilon_{n+1}+\ell_{n+1}^2)^2+n^2\delta_{n+1}^2}\\\delta_n&=\kappa_0|\hat{x}|+\frac{n^2\delta_{n+1}\cdot\ell_{n+1}^2}{(n\varepsilon_{n+1}+\ell_{n+1}^2)^2+n^2\delta_{n+1}^2}\\&\text{但し，}\ \ell_{n+1}=|\Omega_{n+1}|=\sqrt{\varepsilon_{n+1}^2+\delta_{n+1}^2}\end{aligned}\right\}\cdots(34)$$

のように，降順 ($n+1\to n$) に連続的に計算できる。

実際，初項として，$\Omega_{n+1}=\eta$ として始めれば，$\varepsilon_{n+1}=-\kappa_0\hat{f}$，$\delta_{n+1}=\kappa_0|\hat{x}|$ と定まる。以降(34)式により，連続的に計算することにより，$\Omega_1=\varepsilon_1+i\delta_1$ が求まる。計算開始項数は，検討の結果 $n=15$ とした。

結果，(32)式により，$H_C(\eta)+iH_S(\eta)$ は，

$$e^{\eta}E_1(\eta)=\frac{1}{\Omega_1}=\frac{1}{\varepsilon_1+i\delta_1}=\frac{\varepsilon_1-i\delta_1}{\ell_1^2}$$
$$=H_C(\eta)+iH_S(\eta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

のように決定できる。

c) 漸近展開

(20)式の $E_1(\eta)$ は，部分積分をすることにより，

$$E_1(\eta)=-\int_\eta^\infty\left(e^{-w}\right)'\cdot\frac{1}{w}dw=\frac{e^{-\eta}}{\eta}-\int_\eta^\infty\frac{e^{-w}}{w^2}dw \cdots(36)$$

のように書ける。これを 3 回繰り返すと，

$$E_1(\eta)=e^{-\eta}\left(\frac{0!}{\eta}-\frac{1!}{\eta^2}+\frac{2!}{\eta^3}\right)-3!\int_\eta^\infty\frac{e^{-w}}{w^4}dw \quad \cdots(37)$$

となり，更に N 回繰り返すと，

$$E_1(\eta)=e^{-\eta}\sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\eta^n}\right\}+(-1)^N N!\int_\eta^\infty\frac{e^{-w}}{w^{N+1}}dw$$
$$\cdots\cdots(38)$$

のような漸近展開形を得ることができる。ここに，第 2 項の積分項は，$|\eta|=\kappa_0R\to\infty$ のとき，剰余項として省略することにすれば，(30)式で定義した H_C, H_S は，

$$e^{\eta}E_1(\eta)\underset{|\eta|\to\infty}{\sim}\sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\kappa_0^nR^n}e^{-in\Theta}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\kappa_0^nR^n}\cos n\Theta\right\}$$
$$-i\sum_{n=1}^{N}\left\{(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\kappa_0^nR^n}\sin n\Theta\right\}$$
$$=H_C(\eta)+iH_S(\eta) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

によって計算できる。但し，上式は発散級数であるから，第 n 項を a_n，第 n+1 項を a_{n+1} と書くとき，漸近級数の計算は，$|a_n|>|a_{n+1}|$ が成立する限り続行する。 ここに，両者の比が

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{|\eta|}=\frac{n}{\kappa_0R}<1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

であるから，漸近級数の打ち切り項数 N は，$N<|\eta|=\kappa_0R$ の条件で決められる。

H_C, H_S を，テーラー展開(30)，連分数展開(35)，漸近展開(39)の 3 種の展開形を用いて，図 3 に示すように動径 $\kappa_0R=|\eta|$ を 1～50 まで，図中に示した偏角 Θ について放射線状に計算し，3 者を比較することにより，複素平面上（第 2 象限）のどの部分にどの展開形を用いるべきかを検討した。

その結果，$\kappa_0|\hat{x}|<10$，$\kappa_0R<30$ のときはテーラー展開，$\kappa_0|\hat{x}|\geqq10$，$\kappa_0R<30$ のときは連分数展開，$\kappa_0R\geqq30$ のときは漸近展開を用いるように領域分割を行った。計算結果は，*Abramowitz* の数表[5]と比較して，正しいことを確認した。

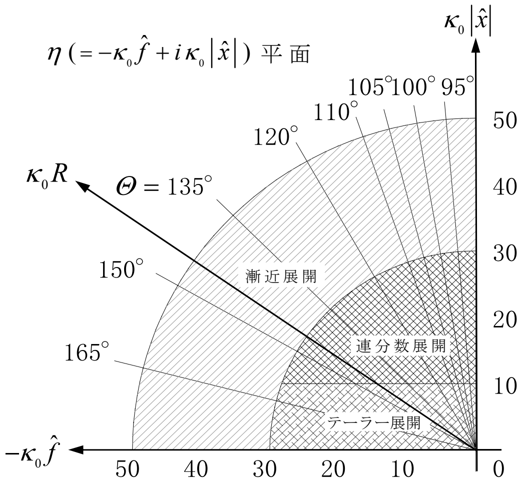

図 3　η 平面の領域分割

2.4　G の微係数に関する表示式

前々節で造波グリーン関数 G を導いたが，実際の境界値問題を解くには，(5)式の翼面条件[H]に示すように，G の x と z に関する微係数の表示式を求めておく必要がある。

まず，(18)式第 2 項の G_ℓ の微係数について考える。$s_1=x$，$s_2=z$ と書き，$s_j\,(j=1,2)$ として纏めて表記すれば，(19)式の積分指数関数 $E_1(i\kappa_0Y)$ の $Y=|\hat{x}|+i\hat{f}$ に関する微係数は，

$$\frac{\partial}{\partial Y}E_1(i\kappa_0Y)=\frac{\partial}{\partial Y}\int_{i\kappa_0Y}^{\infty}\frac{e^{-w}}{w}dw=-\frac{e^{-i\kappa_0Y}}{Y} \quad \cdots(41)$$

となるから，s_j に関する微係数[4]は，

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\left\{e^{i\kappa_0Y}E_1(i\kappa_0Y)\right\}$$
$$=\left\{-\frac{1}{Y}+i\kappa_0e^{i\kappa_0Y}E_1(i\kappa_0Y)\right\}\cdot\frac{\partial Y}{\partial s_j}$$
$$=\left[-\left\{\frac{|\hat{x}|}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+\kappa_0H_S(i\kappa_0Y)\right\}\right.$$
$$\left.+i\left\{\frac{\hat{f}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+\kappa_0H_C(i\kappa_0Y)\right\}\right]\cdot\frac{\partial Y}{\partial s_j} \quad \cdots(42)$$

となる。ここに，式中の $\dfrac{\partial Y}{\partial s_j}$ は，(15)式より，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial x}&=\frac{\partial Y}{\partial s_1}=\operatorname{sgn}\hat{x}\\ \frac{\partial Y}{\partial z}&=\frac{\partial Y}{\partial s_2}=-i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

であるから，G_ℓ の s_j に関する微係数は,

$$\frac{\partial G_\ell}{\partial s_j}=2\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial s_j}\left\{e^{i\kappa_0 Y}E_1(i\kappa_0 Y)\right\}\right]\cdot\operatorname{sgn}\hat{x}\quad\cdots\cdots(44)$$

で計算できる。$j=1,2$ について，H_C, H_S を用いて表記すると，$|\hat{x}|\operatorname{sgn}\hat{x}=\hat{x}$ だから,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_\ell}{\partial x}&=\frac{\partial G_\ell}{\partial s_1}=2\left\{\frac{\hat{f}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+\kappa_0 H_C(i\kappa_0 Y)\right\}\\ \frac{\partial G_\ell}{\partial z}&=\frac{\partial G_\ell}{\partial s_2}=2\left\{\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+\kappa_0 H_S(i\kappa_0 Y)\operatorname{sgn}\hat{x}\right\}\end{aligned}\right\}\cdots(45)$$

を得る。

次に，(18)式第 1 項の G_r の微係数は,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_r}{\partial x}&=-\frac{\hat{f}+2z}{\hat{x}^2+(\hat{f}+2z)^2}-\frac{\hat{f}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}\\ \frac{\partial G_r}{\partial z}&=\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+(\hat{f}+2z)^2}-\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(46)$$

のように，(18)式第 3 項の G_f の微係数は,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_f}{\partial x}&=-2\pi\kappa_0(1+\operatorname{sgn}\hat{x})\,e^{-\kappa_0\hat{f}}\sin\kappa_0\hat{x}\\ \frac{\partial G_f}{\partial z}&=2\pi\kappa_0(1+\operatorname{sgn}\hat{x})\,e^{-\kappa_0\hat{f}}\cos\kappa_0\hat{x}\end{aligned}\right\}\cdots(47)$$

のように，それぞれ容易に計算できる。

以上の結果により，G の微係数 $\dfrac{\partial G}{\partial x},\dfrac{\partial G}{\partial z}$ は，(46), (45), (47)式の 3 成分を，それぞれ加え合わせることによって計算できる。

ここに，(46)式と(45)式を加えると,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_r}{\partial x}+\frac{\partial G_\ell}{\partial x}&=-\frac{\hat{f}+2z}{\hat{x}^2+(\hat{f}+2z)^2}+\frac{\hat{f}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+2\kappa_0 H_C(i\kappa_0 Y)\\ \frac{\partial G_r}{\partial z}+\frac{\partial G_\ell}{\partial z}&=\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+(\hat{f}+2z)^2}+\frac{\hat{x}}{\hat{x}^2+\hat{f}^2}+2\kappa_0 H_S(i\kappa_0 Y)\operatorname{sgn}\hat{x}\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(48)$$

となり，正鏡像渦による $\dfrac{\partial G_r}{\partial s_j}$ の第 2 項と，局部攪乱波 $\dfrac{\partial G_\ell}{\partial s_j}$ の第 1 項の和で，逆鏡像渦による誘導速度を表わすことが分かる。

3. 境界値問題の解法と揚力

3.1 渦強さ Γ_j の決定法

(5)式の翼面条件[H]を，n 個の渦糸 $\Gamma_j(\xi_j,-f_j)$ で構成される(7)式の ϕ を用いて書くと,

$$n_x(x,z)\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\partial G(x,z;\xi_j,-f_j)}{\partial x}+n_z(x,z)\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\partial G(x,z;\xi_j,-f_j)}{\partial z}=2\pi U\,n_x(x,z)\quad\cdots(49)$$

となり，図 4 に示すように，後縁を含む n 個の計算点 (x, z) で成立することを要請する。この連立方程式を解くことにより，Γ_j 決定できる。このとき，渦糸と計算点は，翼の前後縁付近では密に配置する。実際の計算は，$n=111$ で行なった。

(6)式のクッター条件[K]は，後縁での法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を，平均矢高曲線に立てることと，後縁での渦強さを $\Gamma=0$ とすることによって，満足させる。

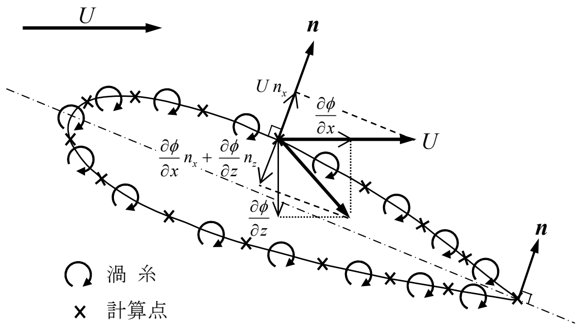

図 4　翼面上の渦糸と計算点の配置

翼厚 $t=0$ の薄翼については，迎角を持った実際の矢高曲線上に渦糸を配置し，その線上で境界条件を満たす。

3.2 揚力係数

揚力 L は，運動量定理により，離散的に解いた渦強さ Γ_j の総和で求まるので，揚力係数 C_L は,

$$C_L=\frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 c}=2\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma_j}{Uc}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

によって算定できる。

図 5 は，迎角 $\alpha=10°, 20°$ の薄翼 ($t=0$) に対する $\dfrac{C_L}{\alpha}$ を，Fn ベースで置点した結果である。深度が浅い $f=0.5$ の場合は，$Fn=0.55$ の辺りでピーク値を取るが，深度が $f=1.0, 3.0$ と深くなるに連れて，無限流体中 ($f=\infty$) の理論値 2π に近付き，Fn による変動も小さくなる様子が分かる。但し，深度 f が浅い場合，C_L と α は直線関係にないから，α

で規格化した $\dfrac{C_L}{\alpha}$ の値も，迎角 α が変われば，図のように異なる値を取る。ここに，Fn は翼弦長 c ベースのフルード数で，(3)式で定義したように，

$$Fn=\frac{U}{\sqrt{gc}}=\frac{1}{\sqrt{\kappa_0 c}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

である。

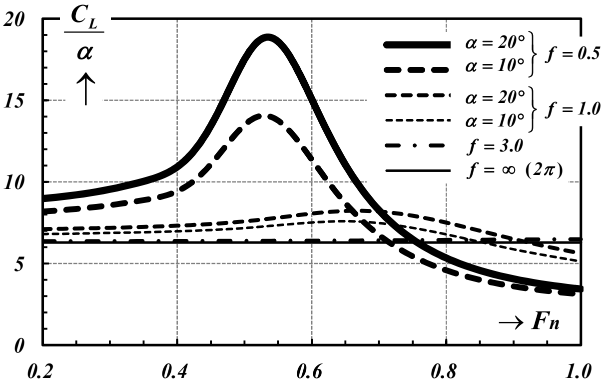

図 5　薄翼 ($t=0, \alpha=10°, 20°$) の揚力係数

4. 波形と造波抵抗

Bernoulli の定理を水面 $(z=\zeta)$ に適用し，無限上流では攪乱が生じないことを用いて，流場定数を決定すれば，

$$\frac{1}{2}\left\{\left(U+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}+g\zeta=\frac{U^2}{2}(=Const) \quad \cdots(52)$$

と書けるから，これを線型化することにより，波高 ζ は，(8)式の静水面上 $(z=0)$ の値によって，

$$\zeta(x)=-\frac{U}{g}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}\bigg]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi\kappa_0 U}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\frac{\partial G(x,0;\xi_j,-f_j)}{\partial x} \quad \cdots\cdots(53)$$

のように求め得る。実際，式中の $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ に対して (48),(47)式の表記を用いれば，

$$\zeta(x)=\frac{1}{\pi U}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\Big\{H_C(-\kappa_0 f_j+i\kappa_0|x-\xi_j|)$$

$$-\pi(1+\mathrm{sgn}(x-\xi_j))e^{-\kappa_0 f_j}\sin\kappa_0(x-\xi_j)\Big\} \quad \cdots(54)$$

のように書くことができ，それぞれの渦糸 Γ_j からの重畳によって求まることが分かる。

図 6 は，NACA0012 翼 ($t=0.12$) に対し，$f=0.951$，$\alpha=5°$，$Fn=0.567$ の場合の波形 $\dfrac{\zeta}{\alpha}$ を求め，他の結果と比較したものである。$t=0$ より $t=0.12$ の方が大きい値を取り，翼厚を考慮したことにより Duncan の計測波形(6)に近付き，翼直上の谷の波高は絶対値がやや小さいものの，下流ではほぼ重なることが分かる。鈴木(勝)の計算値(1)とは，同じ線型自由表面条件で計算しているので，波形が重なっている。

以降，図中の没水深度 f，翼厚 t，波高 ζ，波長 λ，座標値 x, z は，全て翼弦長 c を規準にした無次元値を示す。

一方，無限下流 $(x\to\infty)$ では，後続自由波のみ残るから，波高 ζ は，(54)式の漸近形として，

$$\zeta(x)\underset{x\to\infty}{\sim}\frac{2}{U}\left\{\cos\kappa_0 x\sum_{j=1}^{n}\left(\Gamma_j e^{-\kappa_0 f_j}\sin\kappa_0\xi_j\right)\right.$$

$$\left.-\sin\kappa_0 x\sum_{j=1}^{n}\left(\Gamma_j e^{-\kappa_0 f_j}\cos\kappa_0\xi_j\right)\right\} \quad \cdots\cdot(55)$$

によって求め得る。

結果，下流での波振幅 ζ_A は，

$$\zeta_A=\frac{2}{U}\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j e^{-\kappa_0 f_j}\sin\kappa_0\xi_j\right)^2+\left(\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j e^{-\kappa_0 f_j}\cos\kappa_0\xi_j\right)^2}$$

$$\cdots\cdot(56)$$

によって計算できる。造波抵抗 R_W は，運動量定理により，(56)式の波振幅 ζ_A の自乗に比例した形で算定できるから，造波抵抗係数 C_W は，

$$C_W=\frac{R_W}{\frac{1}{2}\rho U^2 c}=\frac{\frac{1}{4}\rho g\zeta_A^2}{\frac{1}{2}\rho U^2 c}=\frac{1}{2Fn^2c^2}\zeta_A^2 \quad \cdots\cdots(57)$$

によって定まる。

図 7 は，図 5 と同様な薄翼 ($t=0$) に対する

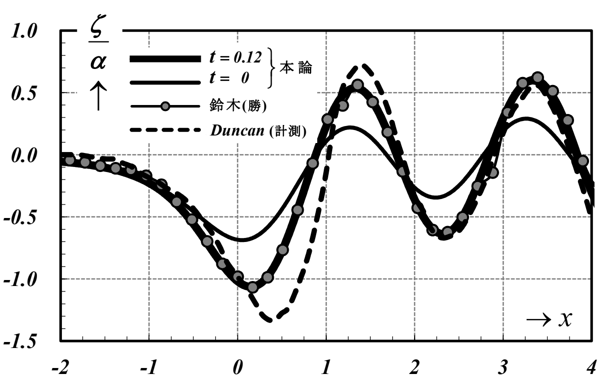

図 6　波形 ζ の比較 ($f=0.951, \alpha=5°, Fn=0.567$)

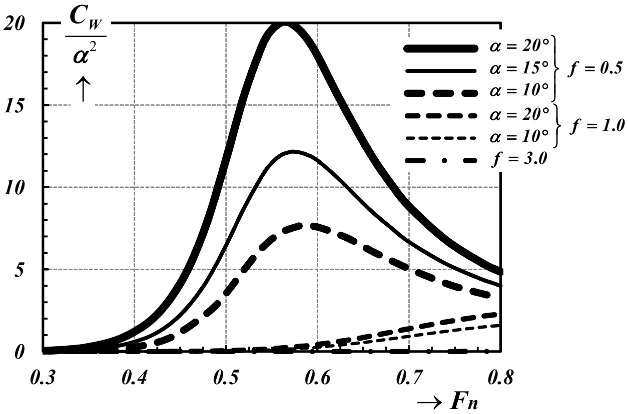

図 7　薄翼 ($t=0, \alpha=10°, 15°, 20°$) の造波抵抗係数

造波抵抗係数 $\dfrac{C_w}{\alpha^2}$ を，Fn ベースに置点した結果である。深度 f が浅い場合，翼厚 $t=0$ でも，C_w は α^2 に比例して得られる訳ではないことが分かる。

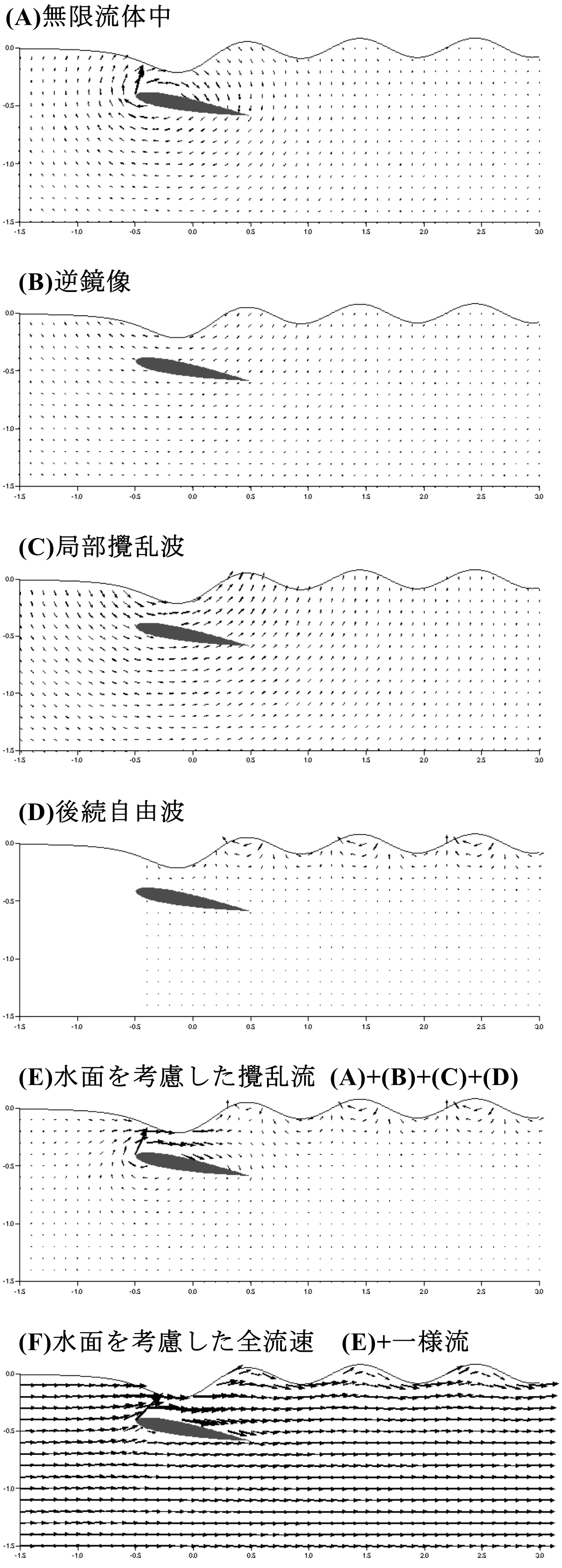

図 8　流速ベクトルの各成分
($t=0.12, \alpha=10°, f=0.5, Fn=0.399$)

5. 流速ベクトルの成分分離

図 8 は，NACA0012 翼 ($t=0.12$) が，迎角 $\alpha=10°$，没水深度 $f=0.5$，フルード数 $Fn=0.399$ で前進する際の流場の様子を，成分分離してシミュレーションした結果である。図中，流速ベクトルと波変位を重ねて描画した。

(A)は，無限流体中で，翼を時計回り渦で表現したときの流れを示していて，(48)式の第 1 項であるグリーン関数の主要解に対応する。

(B)は，水面を挟んで鏡像の位置に同じ迎角で配置されている逆鏡像渦による流場で，(48)式の第 2 項に相当し，流れの向きは(A)と同様，時計回りである。

(C)は，(48)式の第 3 項の相当する，局部攪乱波による流速成分を示す。この H_c, H_s による流れは，(B)と逆の反時計回りになっていることから，(A)と逆の迎角で配置される正鏡像の状態を表わしており，流速の大きさは(B)の倍程度に得られている。

(D)は，(47)式に記す後続自由波による流場で，翼よりも上流では全く流れがなく，水深が深くなると流速は殆どゼロに等しい。

(E)は，(A),(B),(C),(D)を重畳した全攪乱流速を示し，下流の水面の近くでは(D)の後続自由波の流れが顕著であり，翼の上部では(A)の無限流体中の流れが支配的である。

(F)は，(E)の攪乱流に一様流を加えたもので，翼周りでは翼表面に沿い，波の近辺では波面に沿って流れている様子が分かり，シミュレーション結果の妥当性を示している。

6. 圧力分布

静水圧（ $p_0-\rho g z$ ； p_0 は大気圧）を除いた水中翼周りの動的な圧力は，

$$\frac{p-(p_0-\rho g z)}{\rho} = -U\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}{2} \quad \cdots(58)$$

によって，計算できる。式中の攪乱流速は，(8)式により n 個の渦糸 $\Gamma_j(\xi_j, -f_j)$ からの誘導速度の重畳から求まる。

計算条件を，迎角 $\alpha=5°$，没水深度 $f=1.286$，フルード数 $Fn=0.567$ とした NACA0012 翼 ($t=0.12$) 周りの圧力分布を図 12 に示し，本論の

結果を，日野[7]の数値解と比較した。両者の等圧線が 良く一致していることから，本計算法の妥当性を確認できた。

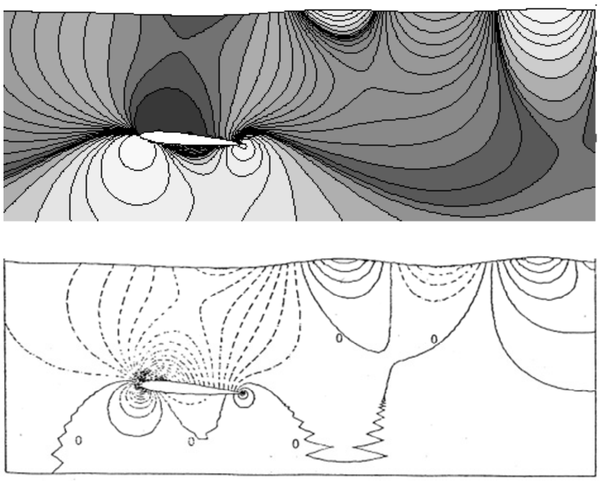

図 9　本論(上)と日野(下)の圧力分布の比較
($t=0.12, \alpha=5°, f=1.286, Fn=0.567$)

次に，$\alpha=5°$, $f=0.75$ の NACA0024 翼（$t=0.24$）に対し，Fn が 0.399, 0.789 の場合の等圧線と流速ベクトル, 波高の変化をシミュレートした結果を，図 10 に示す。

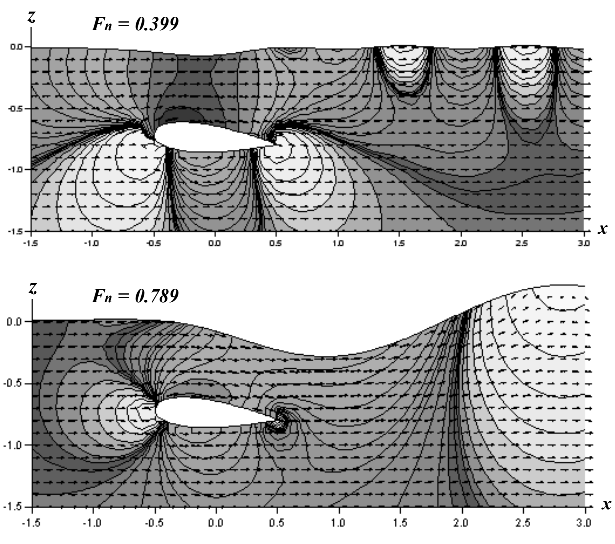

図 10　圧力分布 ($Fn=0.399$(上), 0.789(下))
($t=0.24, \alpha=5°, f=0.75$)

7. 造波シミュレーション

波高 ζ は，4 章の(54)式により，それぞれの渦糸 Γ_j からの x 方向の静水面上での誘導速度の重畳によって計算できる。

図 11 は, 前々章と同じ NACA0012 翼 ($t=0.12$) を対象に，没水深度 $f=0.5$，迎角 $\alpha=5°$ で固定し，フルード数 Fn を徐々に増速したときの波の生成の様子をシミュレートしたものであり，太線で示す。 比較の為に，薄翼近似 ($t=0$) した波形を，細線で示している。

生成波 (後続自由波) の波長 λ は,

$$\frac{\lambda}{c}=\frac{2\pi}{\kappa_0 c}=2\pi Fn^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (59)$$

となる。

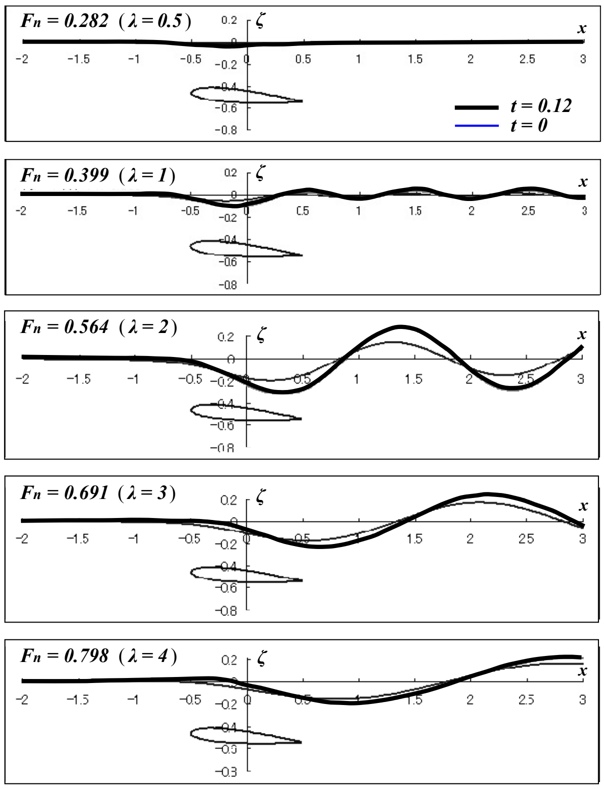

図 11　速度シリーズ ($f=0.5, \alpha=5°$)

続いて，図 12 は迎角 $\alpha=10°$，深度 $f=0.5$，フルード数 $Fn=0.399$ で固定し, NACA 翼の厚み t を変えた場合の生成波の様子をシミュレートした。翼を厚くすると，波高も増加することが分かる。

図 13 は, 深度とフルード数を, それぞれ $f=0.6$, $Fn=0.399$ で固定し, 迎角 α を変化させた計算で, 図 11 と同様，薄翼近似した波形も併せて示す。迎角の増加と共に，波高が増加する様子が，良くシミュレートされている。

8. 結　言

水中翼が高速航走する際の造波シミュレーションを，2 次元渦糸による造波グリーン関数を用いた境界要素法的な手法によって，NACA 翼に対して実施した。

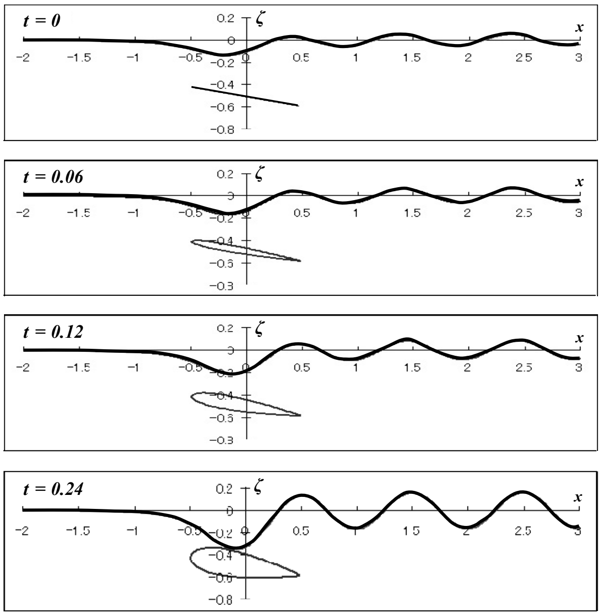

図 12　厚みシリーズ（α=10°, f=0.5, F_n=0.399）

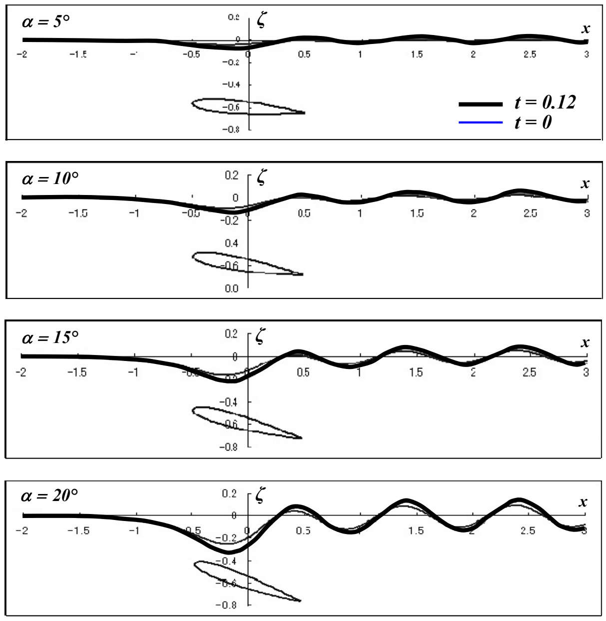

図 13　迎角シリーズ（f=0.6, F_n=0.399）

結果, 造波現象に対する翼の厚みやフルード数, 没水深度, 迎角等の依存性について, 定量的な知見を得た。

流速ベクトルや等圧線の描画には, 日本電子計算㈱の *Gsharp* (Ver 2.0) を用いたことを付記する。

謝 辞

本稿を閉じるに臨み, 長崎総合科学大学 船舶工学科の卒業研究のテーマとして, ともに本研究の計算に鋭意取り組んだ, 金田 学 君, 鈴木 宏司 君, 上田 博之 君に, 深甚なる感謝の意を表します。

参 考 文 献

(1) 鈴木 勝男, 日野 孝則 : 没水翼型のつくる波の計算, 船舶数値流体力学フォーラム･テキスト, 船舶数値流体力学研究会, pp.107～128, 1987.12.

(2) 申 明秀, 茂里 一紘 : Numerical Computation of 2-Dimensional Waves behind a Hydrofoil, 日本造船学会論文集, 第 163 号, pp.17～22, 1988.6.

(3) 中武 一明, 川越 忠彦, 片岡 克己, 安東 潤 : 水中翼に働く流体力の計算, 西部造船會々報, 第 76 号, pp.1～13, 1988.8.

(4) 堀 勉 : 定常造波における Neumann-Kelvin 問題の数値解析 ―（その１）２次元没水円筒に対する検討 ―, 長崎総合科学大学 紀要, 第 33 巻〈創立 50 周年記念号〉, pp. 161～184, 1992.10.

(5) Milton Abramowitz, Irene A. Stegun : Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables , National Bureau of Standerds, Applied Mathematics Series 55, U.S. Department of Commerce, 1964.6.

(6) Duncan, J.H. : The Breaking and Non-Breaking Wave Resistance of a Two-Dimensional Hydrofoil, Jour. Fluid Mech., Vol.126, pp.507～520, 1983

(7) 日野 孝則 : Numerical Computation of a Free Surface Flow around a Submerged Hydrofoil by the Euler / Navier-Stokes Equations, 日本造船学会論文集, 第 164 号, pp.9～17, 1988.12.

平成 28 年 1 月 11 日投稿

ホリ　ツトム
堀　　勉
正会員　長崎総合科学大学 工学部 工学科 船舶工学コース（〒851-0193 長崎市 網場町 536）
E-mail : HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp, HomePage : http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/
1987 年 大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了, 工学博士
所属学会 : 日本航海学会, 日本船舶海洋工学会の各会員 ;　研究テーマ : 水面波動力学

学術刊行物　ISSN 0919−9985

日本航海学会誌　NAVIGATION

平成28年4月　第196号　　Jan 2016 No. 196

日 本 航 海 学 会
Japan Institute of Navigation
c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN