

渦システムによる造波グリーン関数を導入した 定常揚力面の数値解析

正員 堀 勉*

A Numerical Analysis of Steady Lifting Surface Problems by Proposal of Green Function
Considering Wave Generation Caused by Vortex System

by Tsutomu Hori*, Member

Summary

In this paper, Green function considering wave generation caused by vortex system is proposed. The Green functions of an isolated point vortex for the various image systems present an appearance of different wave-making properties. However, composed Green function of vortex ring has uniqueness for the different image system. Accordingly, Green function with image system satisfying rigid wall conditions is applied to numerical analysis of steady lifting surface problems. Then, waves are created only by transverse component of vortex system but longitudinal one doesn't create wave system.

The lift forces acting on hydrofoils, for example, some rectangular wings and delta wings are calculated considering the free surface effects by means of present method. Numerical results present the free surface effects remarkably for the rectangular wings rather than delta wings. And the effects appear strongly as aspect ratio increases. Present analysis method is practically useful because the ordinary computational program for the Green function of a point doublet with x -directional axis can be applied to the present case by slight modification.

1. 序 論

最近、高速艇等に装着される水中翼が水面近くを航走する際の揚力に及ぼす自由表面影響を推定する必要性が高まっている¹⁾。この方面の研究には、古くは丸尾²⁾、西山³⁾によって線型造波理論の立場から自由表面の影響を考慮した揚力線理論による先駆的な研究が、最近では中武⁴⁾によってランキン・ソース法を用いた数値解法や、Li Baiqi⁵⁾による馬蹄形渦からの造波を考慮したグリーン関数法による結果も報告されている。

一方、揚力面を解析する流力モデルとして、Li は馬蹄形渦の重畳として捉えたが、本研究では、それをダブルレット分布で表現することにより、自由表面影響を含んだ翼面上でのポテンシャル値を直接的に求解する立場を取る。この

方法は、著者ら⁶⁾が、以前に非定常揚力面の計算に採用した手法であり、離散的には区分的にダブルレットの面密度を一定にすることにより渦格子を構成することから、渦システムによる造波グリーン関数^{7),8),9)}を構築することが不可欠となる。この方法によれば、揚力を計算する際に翼弦長方向の積分を行なうことなく、後縁パネルでのダブルレット密度を翼幅方向にのみ積分すればよいため、計算精度の面でも有利であり、自由表面影響についても高精度に求め得ることが期待できる。

以上の状況に鑑み、本論では、定常揚力面問題を渦システムによる造波グリーン関数を導入することによって解析する手法を提案する。グリーン関数の構築に際しては、採用する鏡像モデルに依存して造波特性に任意性を生ずるが、渦輪として取り扱うことにより、解の一意性を証明する。その結果から、縦渦成分からは波を生じず、半無限長の随伴渦からの造波を考慮する必要がないなど数値解析上有利な、剛壁条件を満たす正鏡像モデルを採用することにより、横渦成分に対する造波グリーン関数を構築し、渦糸や渦輪の波動場の計算例から、その妥当性を検証する。ま

* 長崎総合科学大学 情報科学センター

た、上記グリーン関数を核関数に採用して、矩形翼や三角翼に対する揚力面問題を解くことにより、水中翼に作用する揚力に及ぼす自由表面影響を算定し、アスペクト比、翼形状及びフルード数、没水深度等に対する依存性について論じた。まだ不十分な部分も多いが、定常揚力面の数値解析に対する渦システムによる造波グリーン関数の導入という意味で報告し、諸賢の批判を仰ぐ次第である。

2. 渦システムによる造波グリーン関数の展開

水中翼(弦長 c , 幅 B) が、自由表面下の浅深度域を高速航走する際の、造波を考慮した定常揚力面問題について考える。

座標系は、Fig. 1 に示すように、静水面上に座標原点 o を配し、一様な流れ方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸、これらと右手系で直交するよう右舷方向に y 軸を取ったデカルト座標系とする。また、物理量はすべて、翼弦長 c 、一様流速 U 、流体密度 ρ を規準に無次元化して扱うものとする。従って、自由表面を有する大きさ 1 の流れの中に、弦長 1、翼幅 b ($b = \frac{B}{c}$ であり、矩形翼の場合の縦横比 Λ に相当する) の水中翼が、迎角 α の状態で、翼弦長に対する相対深度 f の位置に置かれているとして、問題を設定する。

2.1 揚力面の渦輪表現

本論では、揚力成分を主眼に扱うことから、翼厚を無視して平均矢高面で論じ、更に迎角 α が小さいと仮定し、反りによる速度ポテンシャル ϕ を導入すれば、翼面での境界条件は、

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\alpha \quad (\text{on } z = -f) \quad (1)$$

のように線型化され、 z 方向の誘導速度について xy 平面に平行な投影面で満足すればよいことになる。また、翼後縁でのクッタ条件は、

$$[K] \quad \phi|_{\text{trailing edge}} = \phi|_{\text{wake}} \quad (2)$$

のように、後縁での翼面渦のポテンシャル値を随伴渦のそ

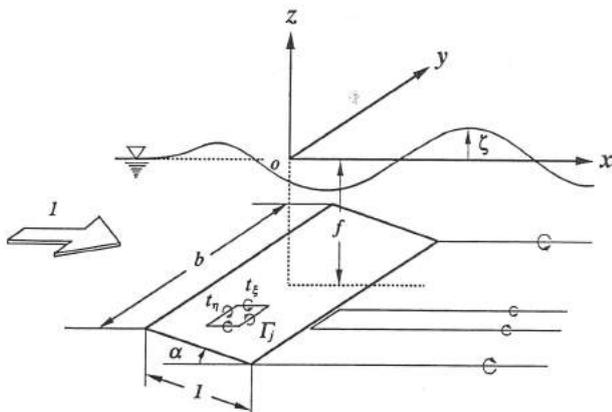


Fig. 1 Coordinate system and definitions of some basic quantities in the submerged lifting surface problem.

れと等置することにより満足させ得る。流力モデルとしては、投影翼面と、一様流方向に強さを変えることなく後流に流出する随伴渦面の両者に、 z の負軸向きダブレットを面分布させることによって、揚力面を表現する。

実際、その速度ポテンシャル ϕ は、面密度 Γ を区分的な面要素 A_j 内で一定とすれば、

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{A_j} \Gamma(x, y) \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta \\ &\approx -\frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \iint_{A_j} \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

但し、 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+f)^2}$ (3)

のように離散化できる。ここに、ダブレットの分布面上でのポテンシャル値は、

$$\phi|_{z=-f \pm 0} = \pm \frac{\Gamma(x, y)}{2} \quad (4)$$

として、その面密度で陽に定まる。また、誘導速度場 v は、(3)式の勾配を取ることで、

$$\begin{aligned} v &= \nabla_P \phi \\ &\approx -\frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \nabla_P \iint_{A_j} \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5)$$

のように得られる。式中、 $\nabla_P = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ は、流場内の点 $P(x, y, z)$ に作用するハミルトンの演算子である。ここに、ストークスの定理を適用することにより、面積分を線積分に変換し、 $\frac{\partial}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial z}$ 等の関係を用いれば、

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \oint_{c_j} \left[-\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta \right\} \mathbf{i} + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right\} \mathbf{j} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right\} \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \nabla_P \times \oint_{c_j} \frac{\mathbf{t}_r}{r} ds \end{aligned} \quad (6)$$

のように、線積分項で表わされるベクトル・ポテンシャルの回転によって速度場が表現される。これは、ビオ・サバールの法則に従った時計回りの渦輪 c_j による誘導速度場と等価であり、ダブレットの面密度 Γ_j に相当する強さの渦糸によって構成される。ここに、式中の \mathbf{t}_r は、Fig. 1 に示すように、 $\mathbf{t}_r = t_x \mathbf{i} + t_y \mathbf{j}$ なる成分を有する水平面内にある渦糸の方向ベクトルである。

2.2 グリーン関数の構築

誘導速度場 v を、(6)式のベクトル・ポテンシャル項の正鏡像渦を考慮したものに、グリーン関数 G' の勾配を重畳して、

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \oint_{c_j} \left\{ \nabla_P \times \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \mathbf{t}_r + \nabla_P G' \right\} ds \\ &\equiv \frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_j \oint_{c_j} v_j ds \end{aligned}$$

但し、 $r' = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-f)^2}$ (7)

のような形で構成する。これは、船の造波抵抗に及ぼす粘性影響を体積分布した伴流渦からの造波特性によって表現した Brard⁷⁾ にならったものである。ここに、(7)式の v_j は、同式の中括弧内を記したものであり、強さ 4π の渦点に

よる速度場に対応し、第1項はベクトル・ポテンシャルの回転によって生ずる速度場を表わしたもので、 v_r と書けば、(6)式の関係により、

$$\begin{aligned} v_r &= u_r i + v_r j + w_r k \\ &= \left\{ -it_\eta \frac{\partial}{\partial z} + jt_\xi \frac{\partial}{\partial z} + k \left(t_\eta \frac{\partial}{\partial x} - t_\xi \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。このとき、線型自由表面条件 $[F]$ は、

$$[F] \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_r + \frac{\partial G'}{\partial x} \right) + \kappa_0 \left(w_r + \frac{\partial G'}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial G'}{\partial x} = 0 \quad (\text{on } z=0) \quad (9)$$

のように書くことができる。式中の κ_0 は、

$$\kappa_0 = \frac{gc}{U^2} = \frac{1}{F_n^2} \quad (10)$$

で定義される無次元波数であり、弦長 c を規準にしたフルード数 $F_n \left(= \frac{U}{\sqrt{gc}} \right)$ の2乗の逆数である。また、 μ はレイリーの仮想摩擦係数であり、無限上流には波が生じないという生成波の放射条件を自動的に満足させるために導入したもので、グリーン関数構築後は $\mu \rightarrow +0$ とする。但し、今の場合には正鏡像効果により、 $w_r|_{z=0} = 0$ であり、対応する $[F]$ を満足するように、造波グリーン関数 G' を求解すればよい。

解法は、通常のフーリエ変換の手法に従う。そのとき、(8)式の $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$ は、 $-f < z < f$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-kf + ik(\omega - \omega')} \sinh(kz) dk \\ &\quad \left. \begin{aligned} \omega &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ \omega' &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

のように展開できるから、グリーン関数 G' についても同様なフーリエ積分型を仮定し、(9)の自由表面条件式 $[F]$ に代入して、 G' について解けば、

$$G' = \frac{it_\eta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega')}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} k dk \quad (12)$$

のように定まる。これを見ると、グリーン関数が横渦成分 t_η のみに支配され、縦渦成分 t_ξ が寄与しないのは、正鏡像を考慮した場合、縦渦成分による誘導速度は $z=0$ 上で u_r, w_r ともにゼロとなり、 G' を付加することなくベクトル・ポテンシャル項自身で水面条件 $[F]$ を満たすためである。また、(12)式は形式的には、没水球を表わす x の負軸向きダブレットに対するグリーン関数の波動項¹⁰⁾ を定数倍 (正確には、 $\frac{t_\eta}{\kappa_0}$ 倍) したものに他ならないことから、それと全く同様な造波特性を呈する。

実際、後流での G' の漸近挙動は、

$$\begin{aligned} G' &\sim_{z \rightarrow \infty} -4\kappa_0 t_\eta \\ &\quad \times \text{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0(z-f)\sec^2 \theta + i\kappa_0(\omega - \omega')\sec^2 \theta} \sec^3 \theta d\theta \right] \end{aligned} \quad (13)$$

であり、正鏡像効果により縦渦から波は生じていない。式中の $\text{Re}[\dots]$ は、大括弧内の実部を取ることを意味する。

しかしながら、渦システムに対する鏡像の取り方には任意性があり、何もここに示してきた正鏡像に限るという理論的な根拠はない。

例えば、Tatinclaux⁸⁾ が行なったように、渦点による誘導速度場 v_j を、水面に対する逆鏡像を考慮して

$$v_j = \nabla_P \times \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) t_r + \nabla_P G' \quad (14)$$

のように構築すれば、対応するグリーン関数 G' は、

$$\begin{aligned} G' &= \frac{i\kappa_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{t_\eta - t_\xi \tan \theta}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} \\ &\quad \times e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega')} dk \\ &\sim_{z \rightarrow \infty} -4\kappa_0 \text{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t_\eta - t_\xi \tan \theta) \right. \\ &\quad \left. \times e^{\kappa_0(z-f)\sec^2 \theta + i\kappa_0(\omega - \omega')\sec^2 \theta} \sec \theta d\theta \right] \end{aligned} \quad (15)$$

となり、(12)式の正鏡像モデルとは異なり、横渦・縦渦両成分から波が生ずる形式となっている。

一方、何ら鏡像渦を考慮することなく、(6)式にグリーン関数を付加した形で、速度場 v_j を

$$v_j = \nabla_P \times \frac{t_r}{r} + \nabla_P G' \quad (16)$$

として構築すれば、その場合のグリーン関数は、

$$\begin{aligned} G' &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{t_\eta(k + \kappa_0) - t_\xi \kappa_0 \tan \theta}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} \\ &\quad \times e^{k(z-f) + ik(\omega - \omega')} dk \\ &\sim_{z \rightarrow \infty} -2\kappa_0 \text{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ t_\eta (\sec^2 \theta + 1) - t_\xi \tan \theta \right\} \right. \\ &\quad \left. \times e^{\kappa_0(z-f)\sec^2 \theta + i\kappa_0(\omega - \omega')\sec^2 \theta} \sec \theta d\theta \right] \end{aligned} \quad (17)$$

として得られ、(12)式の正鏡像モデルの場合と、(15)式の逆鏡像に対する G' を足して2で割った形に相当する。

以上の考察により、渦システムに対する造波グリーン関数は、渦点単独で論ずる限り、採用する鏡像モデルに依存して造波特性が異なるという任意性が残るが、ヘルムホルツの渦定理によって、渦は流体中に孤立的には存在し得ないから、ここで想定した状況でのグリーン関数の任意性は形式的なものである。

2.3 渦輪のグリーン関数と解の一意性

前節では、渦点のグリーン関数を異なる3種の鏡像モデルに対して求めたが、実際の速度場は(7)式のように、離散的な渦格子の重畳で構成される。本節では、閉じた渦輪に対するグリーン関数を構築し、渦点に対して生じたグリーン関数の任意性を除去し、解の一意性を証明してみる。

原点直下 $z = -f$ なる面内に、時計回りの矩形の渦輪 c_j ($\xi = \pm \bar{\xi}, \eta = \pm \bar{\eta}$) を想定する。これに対するグリーン関数 G'_{ring} は、(12), (15), (17)各式に示す渦点による G' を、

$$G'_{Ring} = \oint_{c_j} G' ds = \int_{-\bar{\eta}}^{\bar{\eta}} \left[G' \Big|_{\xi=0}^{\xi=-\bar{\xi}} + G' \Big|_{\xi=0}^{\xi=\bar{\xi}} \right] d\eta \\ + \int_{-\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \left[G' \Big|_{\eta=0}^{\eta=\bar{\eta}} + G' \Big|_{\eta=0}^{\eta=-\bar{\eta}} \right] d\xi \quad (18)$$

のように、周回積分することによって求め得る。但し、正鏡像モデルに対する(12)式の場合は、縦渦から波は生じず、 $t_\eta=0$ のとき $G'=0$ であるから、前者の η に関する積分のみ行えばよい。

実際、(18)式の線積分を、各々の G' の漸近形に対して実行すると、採用する鏡像モデルに拘わらず、

$$G'_{Ring} \sim_{x \rightarrow \infty} 32 \\ \times \text{Im} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin(\kappa_0 \bar{\xi} \sec \theta) \sin(\kappa_0 \bar{\eta} \tan \theta \sec \theta) \right\} d\theta \right] \quad (19)$$

のように同一の結果を得、どの鏡像モデルによっても同一の波を生じることが分かる。これによって、渦点単独の場合のグリーン関数に生じた鏡像モデルに依存する任意性は解消され、閉じた渦輪のレベルでは、渦システムに対する造波グリーン関数の一意性が証明された。なお、式中の $\text{Im}[\dots]$ は、大括弧内の虚部を取るものとする。

以上のことから、揚力面を(7)式の渦格子モデルを用いて計算する場合、渦システムに対して、どの鏡像モデルを採用しても同一の結果が得られるものの、正鏡像モデルを採用すれば、波は横渦のみから生ずることになるから好都合であり、波動場に対する物理的解釈を容易にする。特に、後方に自由流出する随伴渦については、縦渦であるため波を生じないから、グリーン関数を半無限区間にわたって積分する必要もなく、有利である。

一方、前々節で示したように、渦輪による速度場は、 z 軸向きダブルレットの面分布によるものと等価であるから、グリーン関数のレベルでも同様の関係が成立するはずである。

実際、単位強さの z の負軸向きの点ダブルレットによる速度場 v_D を、

$$v_D = \nabla_P \left\{ -\frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r} \right) + G'_D \right\} \quad (20)$$

の形のポテンシャル流場で構成し、グリーン関数 G'_D を求めると、

$$G'_D = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{k + \kappa_0 \sec^2 \theta}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} \\ \times e^{k(z-f) + ik(\omega-\omega')} k dk \\ \sim_{x \rightarrow \infty} 4\kappa_0^2 \text{Im} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0(z-f)\sec^2 \theta + ik_0(\omega-\omega')\sec^2 \theta} \sec^4 \theta d\theta \right] \quad (21)$$

となり、形式的には、点吸い込み $\frac{1}{r}$ に対するグリーン関数 G を没水深度 f で偏微分 $\left(= -\frac{\partial G}{\partial f} \right)$ することによって

求め得る。微係数に対する計算式については、付録Bに示す。

そこで、(18)式の渦輪 c_j で囲まれた矩形領域に一樣に面分布したダブルレットのグリーン関数 $G'_{Doublet}$ は、(21)式を面積分することにより、

$$G'_{Doublet} = \int_{-\bar{\eta}}^{\bar{\eta}} \int_{-\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} G_D d\xi d\eta \\ \sim_{x \rightarrow \infty} 32 \text{Im} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin(\kappa_0 \bar{\xi} \sec \theta) \sin(\kappa_0 \bar{\eta} \tan \theta \sec \theta) \right\} d\theta \right] \\ \times e^{\kappa_0(z-f)\sec^2 \theta + ik_0 \omega \sec^2 \theta} \text{cosec } 2\theta \quad (22)$$

のように求まり、(19)式の渦輪のグリーン関数 G'_{Ring} と一致する。

これによって、前々節で示した渦輪とダブルレットの等価性を、造波グリーン関数レベルで示し得た。

2.4 横渦のグリーン関数の表示式

前節までの考察により、自由表面影響を考慮して揚力面を計算するには、核関数として、(12)式に示した正鏡像を考慮した横渦のグリーン関数を採用すればよいことが分かった。その際、縦渦成分からの造波作用は生じない。本節では、グリーン関数を実際に数値計算できる表示式を導く。

まず、(12)式の G' を、被積分関数における k の次数を下げ、

$$G' = \frac{it_\eta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec \theta}{\hat{f} - i\hat{\omega}} d\theta \\ + \frac{ik_0 t_\eta}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^3 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\hat{f} + ik\hat{\omega}}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \quad (23)$$

のように変形しておく。ここに、第1項は k に関する積分を解析的に実行した結果であり、式中の \hat{f} 、 $\hat{\omega}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{f} &\equiv f - z \\ \hat{\omega} &\equiv \omega - \omega' \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と置いたものである。

さて、翼面条件や波形の計算等、實際上必要なのは、グリーン関数そのものよりも、むしろその微係数である。実際、(23)式を x 及び z で偏微分し、 θ に関する積分区間を半分に折り返せば、

$$\frac{\partial G'}{t_\eta \partial x} = -\frac{2\hat{f}}{r^3} - \frac{2}{\pi} \text{Re} \left[\kappa_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 \theta}{\hat{f} - i\hat{\omega}} d\theta \right. \\ \left. + \kappa_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sec^4 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\hat{f} + ik\hat{\omega}}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \right] \quad (25)$$

$$\frac{\partial G'}{t_\eta \partial z} = -\frac{2}{\pi} \text{Im} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec \theta}{(\hat{f} - i\hat{\omega})^2} d\theta + \kappa_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^3 \theta}{\hat{f} - i\hat{\omega}} d\theta \right. \\ \left. + \kappa_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \sec^5 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\hat{f} + ik\hat{\omega}}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \right] \quad (26)$$

のようになり、両者とも $y=\eta$ に関して対称であるから $y-\eta \geq 0$ に対して表記したものである。ここに、 θ の積分端点に現われる Θ は、

$$\Theta = \tan^{-1} \left(\frac{y-\eta}{x-\xi} \right) \quad (27)$$

で与えられる水平面内の偏角を表わし、今の場合 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲内にある。また、両式中第3項の k に関する積分は、無限遠での径路積分が消失するように、 $\omega > 0$ なる $\theta \left[-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} + \theta \right]$ に対して表記したものであり、複素平面上での周回積分を行ない、コーシーの積分定理を適用することにより実軸上の積分を虚軸上の積分に変換し、最終的に $\mu \rightarrow +0$ であることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\bar{f} + ik\bar{\omega}}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk \\ &= -e^{-f^* + i\omega^*} \text{Ei}(f^* - i\omega^*) \\ & \quad + i\pi e^{-f^* + i\omega^*} \cdot \{\text{sgn}(\sec \theta) + 1\} \end{aligned} \quad (28)$$

のように、複素域に拡張された積分指数関数 Ei を用いて表記できる^{(11),(12),(13)}。ここに、第2項は $\sec \theta > 0$ なる $\theta \left[-\frac{\pi}{2} + \theta, \frac{\pi}{2} \right]$ に対して留数項が生じたものであり、自由波に相当する。また、式中の f^* , ω^* は新たに、

$$\left. \begin{aligned} f^* &\equiv \kappa_0 \bar{f} \sec^2 \theta \\ \omega^* &\equiv \kappa_0 \bar{\omega} \sec^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

と定義したものである。ここに、Ei は

$$\begin{aligned} \text{Ei}(f^* - i\omega^*) &= -\int_{-f^* + i\omega^*}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \\ &= \gamma + \log_e \sqrt{\omega^{*2} + f^{*2}} + i \left(\Omega + \frac{\pi}{2} \right) \\ & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega^{*2} + f^{*2}}^n}{n \cdot n!} e^{in(\Omega - \frac{\pi}{2})} \\ &\equiv E_c + iE_s \\ & \quad \left. \begin{aligned} \gamma &= 0.57721 \dots (\text{Euler の定数}) \\ \text{但し, } \Omega &= \tan^{-1} \left(\frac{f^*}{\omega^*} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{f}}{\bar{\omega}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

のような、テイラー級数に展開した形として得られ⁽¹²⁾、実部と虚部をそれぞれ E_c , E_s としたものであり、展開半径 $R^* = \sqrt{\omega^{*2} + f^{*2}} (= \kappa_0 \sec^2 \theta \sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{f}^2})$ が極端に大きな場合を除き、容易に数値計算できる表式である。

一方、 R^* が極端に大きくなると、(30)式は数値的に破綻する。その場合の Ei の計算には、

$$\begin{aligned} \text{Ei}(f^* - i\omega^*) &\underset{R^* \rightarrow \infty}{\sim} e^{f^* - i\omega^*} \sum_{n=1}^N \frac{(n-1)! \cos^{2n} \theta}{(\kappa_0 \sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{f}^2})^n} \\ & \quad \times e^{-in(\Omega - \frac{\pi}{2})} \end{aligned} \quad (31)$$

のような漸近展開形の採用が³、数値計算上、精度の面でも計算時間の面でも有利であり⁽¹²⁾、特に $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ でも発散の不都合が生じない。また、上式は発散級数ではあるが、級数計算を真値に漸近する $\frac{N}{R^*} \leq 1$ の条件を満たす項数 N で

打ち切ることによって、最良の近似値を得ることができる。

積分指数関数 Ei に対する (30), (31) 両式の結果を (28) 式に用い、それを使って G' の微係数 (25), (26) 式を書き改めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G'}{t_\eta \partial x} &= -\frac{2f}{r'^3} - \frac{2\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} G_x^*(\theta) d\theta \\ & \quad + 4\kappa_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} e^{-f^*} \sin \omega^* \sec^4 \theta d\theta \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G'}{t_\eta \partial z} &= -\frac{2\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} G_z^*(\theta) d\theta \\ & \quad - 4\kappa_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2} + \theta} e^{-f^*} \cos \omega^* \sec^5 \theta d\theta \end{aligned} \quad (33)$$

のように整理することができる。ここに、式中の G_x^* , G_z^* は、局部波を計算する際の被積分関数に相当し、それぞれ

$$\begin{aligned} G_x^*(\theta) &= \left\{ \frac{f^*}{\omega^{*2} + f^{*2}} \right. \\ & \quad \left. - e^{-f^*} (E_c \cos \omega^* - E_s \sin \omega^*) \right\} \cdot \sec^4 \theta \\ & \underset{R^* \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n=2}^N \frac{(n-1)! \cos^{2n-4} \theta}{(\kappa_0 \sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{f}^2})^n} \cdot \cos \left\{ n \left(\Omega - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} G_z^*(\theta) &= \left\{ \frac{2f^* \omega^*}{(\omega^{*2} + f^{*2})^2} + \frac{\omega^*}{\omega^{*2} + f^{*2}} \right. \\ & \quad \left. - e^{-f^*} (E_c \sin \omega^* + E_s \cos \omega^*) \right\} \cdot \sec^5 \theta \\ & \underset{R^* \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n=3}^N \frac{(n-1)! \cos^{2n-5} \theta}{(\kappa_0 \sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{f}^2})^n} \cdot \sin \left\{ n \left(\Omega - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

のように書くことができる。特に、(32), (34) 両式による $\frac{\partial G'}{t_\eta \partial x}$ は、 x 軸向きダブルレットによる波の表式⁽¹¹⁾と等価な形として得られている。ここに、両式中の E_c , E_s は (30) 式に示す級数によるものとする。この G_x^* , G_z^* を、 θ について数値積分するに当たっては、 R^* が小さい場合は前者を、 R^* が大きい場合は後者の漸近解を用いて行なう。この使い分けによって、 $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ においても発散の問題を生じることなく、容易に数値計算できる。実際、本論の計算では、 $R^* = 25$ を境に両式を切り換えることにより、シンプソンの積分公式によって行なった。

一方、自由波に相当する (32) 式第3項及び (33) 式第2項については、 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ で被積分関数が激しく振動するため、付録 A に示すように、 $t = \tan \theta$ なる積分変数の変換を行なった後に数値積分した。

2.5 グリーン関数の計算例

ここでは、前節で導いた渦システムに対する造波グリーン関数を、フルード数、没水深度が $F_n = f = 1$ の条件の下、種々の渦モデルについて計算した結果について示す。

2.5.1 横渦のグリーン関数

横渦点単独のグリーン関数の微係数は、(32)、(33)式によって $t_n=1$ として、計算できる。Fig. 2 は、原点直下(0, 0, -f) に置かれた横渦によるグリーン関数の x 及び z 方向の微係数の静水面 $z=0$ 上での値を、等高線図の形にして描いたものであり、(8)式のベクトル・ポテンシャル項を加えた値である。両者とも x 軸に関して対称であるから、上面に $u_r + G'_x$ 、下面に G'_z の値を示しているが、両者の位相がズレている様子が分かる。Fig. 3 は、 $y=0$ での縦断面図を Fig. 2 から切り出したものであり、等高線図で見られた両者の位相のズレが $\frac{\pi}{2}$ であることが分かる。 G'_z については、採用したグリーン関数が正鏡像モデルであることから、ここで示す $z=0$ 上での値には、ベクトル・ポテンシャル項による z 成分 w_r からの寄与は生じない。

Fig. 4, 5 は、Fig. 3 の両者をそれぞれ、ベクトル・ポテ

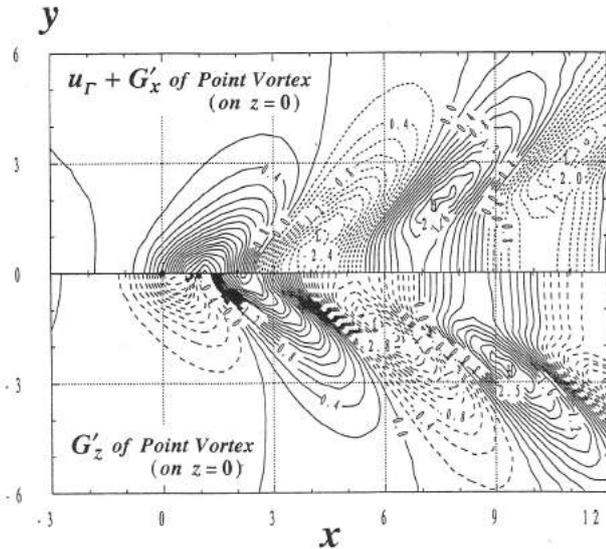


Fig. 2 Contours of derivatives of Green function for a transverse point vortex in the case of $F_n=f=1$ on $z=0$.

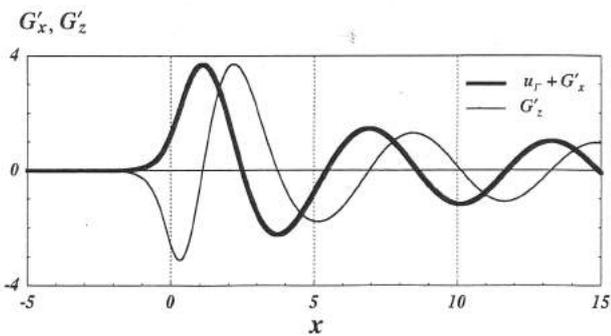


Fig. 3 Profiles of derivatives of Green function for a transverse point vortex in the case of $F_n=f=1$ on $y=z=0$.

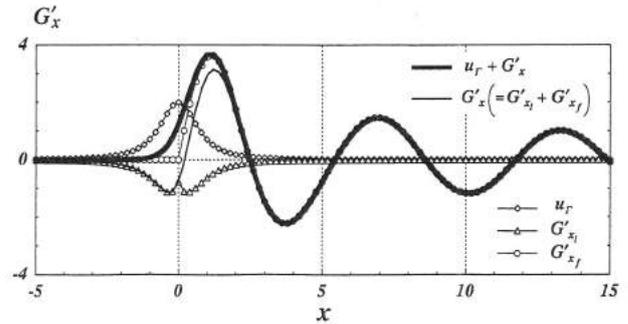


Fig. 4 Components of x -derivative of Green function for a transverse point vortex in the case of $F_n=f=1$ on $y=z=0$.

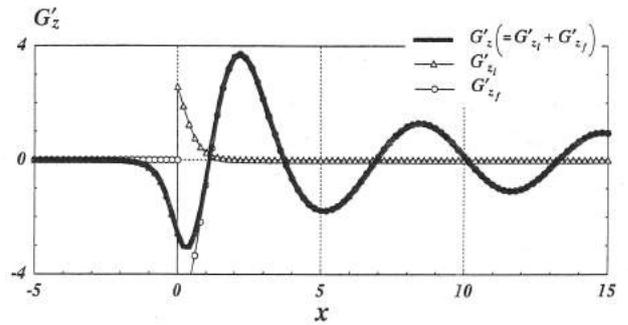


Fig. 5 Components of z -derivative of Green function for a transverse point vortex in the case of $F_n=f=1$ on $y=z=0$.

ンシャル項 u_r 、局部波 G'_{xi} 、 G'_{zi} 及び自由波 G'_{zf} 、 G'_{zf} の各成分に分離して表示したものである。Fig. 4 に細実線で示すベクトル・ポテンシャル項 u_r を含まない G'_x は、 x の負軸向きダブルレットのそれ¹¹⁾ に相当する。Fig. 5 の G'_z については、局部波及び自由波の成分単位では渦点直上の $x=0$ で不連続となっているものの、両者を重畳した結果は連続的に得られており、グリーン関数の計算が正しく行なわれていることを示している。

2.5.2 揚力線及び渦輪のグリーン関数

Fig. 6 は、渦長が $b=1$ ($\Gamma=4\pi$) 及び $b=2$ ($\Gamma=2\pi$) の一定強さの渦糸から生ずる波を、 $y=0$ の中心面で描いたものであり、ともに渦の総量は 4π である。実際には、渦糸を後述するセミ・サークル法で9分割し、

$$\zeta = -\frac{1}{\kappa_0} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{z=0} \approx -\frac{1}{4\pi\kappa_0} \sum_j \Gamma_j (u_r + G'_z) \delta y_j \quad (36)$$

のように離散的な横渦点からの波の重畳として、(32)式によって計算したものである。ここに、両端から流出する随伴渦は縦渦成分であり、正鏡像を考慮していることから、2.2節で示したように波は生じない。一方、○でマークしたのは、渦糸をその中点に置いた強さ 4π の渦点に集約した場合の波形である。3者を見比べると、原点付近の谷部での波高が、 $b=2$ 、 $b=1$ 、渦点の順に尖ってくるものの、後

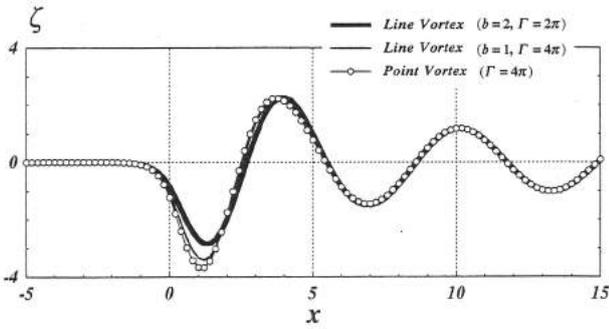


Fig. 6 Comparison of wave profiles caused by line vortex and point vortex in the case of $F_n=f=1$ on $y=0$.

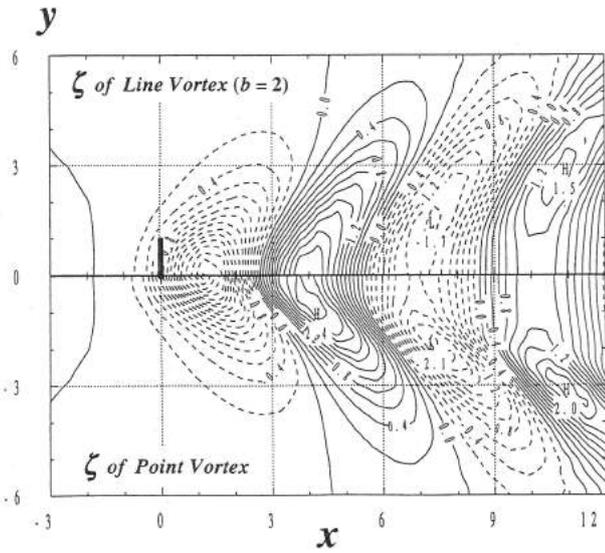


Fig. 7 Comparison of wave contours caused by line vortex and point vortex in the case of $F_n=f=1$.

方での3者の波形は、図で見る限り全く一致している。このような状況から、渦糸の計算を渦点に集約して行なっても、さほど精度の劣化は生じないようであり、本論の揚力面の計算においても、グリーン関数については同様な渦点近似を採用して行なった。Fig. 7は、その波紋図であり、上面には渦長2の渦糸による結果を、下面には渦点に集約した場合の結果を示す。波高値そのものは、渦点によるものの方が高目に生ずるものの、両者の造波パターンは、原点近傍を除けば非常に良く一致しており、波紋のレベルからも渦点に集約することは良い近似となっていることが分かる。

Fig. 8は、2.3節で示した渦輪とz軸向きダブルットの等価性を数値的に示したものである。計算は、渦輪として $b=2, c=1$ 及び $b=c=1$ の2タイプについて行ない、比較のために、Fig. 6と同様に前後それぞれの渦糸を渦点に集約した渦対の場合と、zの負軸向ダブルットを原点に集約した場合の波形も示す。どの計算モデルでも、渦やダブル

ット強さの総和が 4π となるように調整してある。ただし、波形は(36)式のようにx方向の微係数に支配されるから、縦渦の寄与はなく、渦輪は $x=\pm\frac{1}{2}$ に配された互いに逆向きの横渦成分によって計算し得る。このような近似を行なっているにも拘わらず、得られた4者の一致度は、特に後方での自由波形では良好であり、2.3節の証明を数値的に確認し得た。ただ、原点付近の山谷での波高は、 $b=2$ の渦輪が最も低目で、付録(B-2)式によって計算した点ダブルットに集約した場合が最も尖っている様子が現われており、分布渦を1点に集約する程に、その特異性が強まる影響と考えられる。Fig. 9は、 $b=2$ の渦輪と点ダブルットに集約した場合を波紋図で比較したものであり、山谷での波高値そのものは下面に示す点ダブルットに集約した場合が若干大き目に生ずるものの、造波パターンとしての位相の一致度は良好である。また、下面の波紋図は、Fig. 2の下面に示す横渦の G_z に一致し、(B-2)式と(33)式を比較したとおりである。

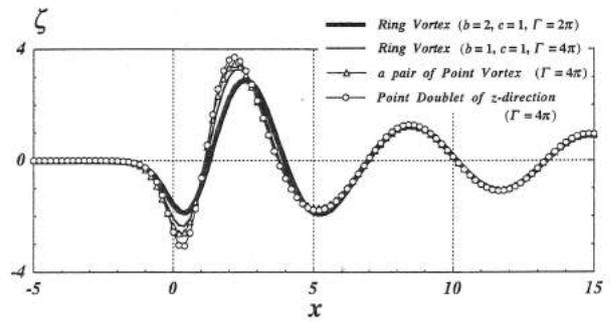


Fig. 8 Comparison of wave profiles caused by ring vortex and point doublet with z-directional axis in the case of $F_n=f=1$ on $y=0$.

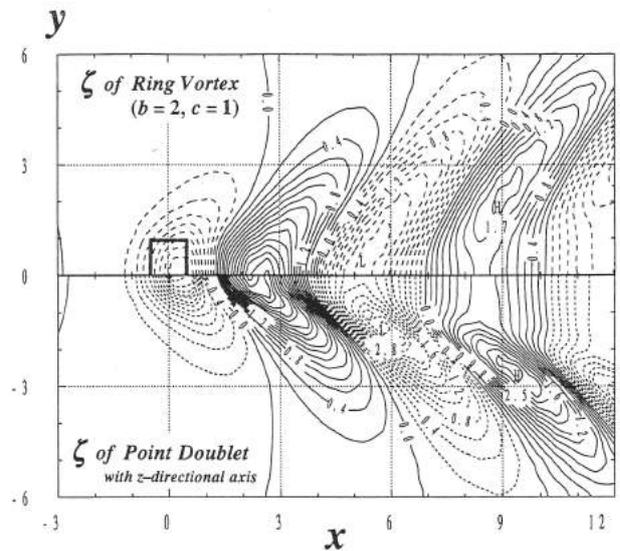


Fig. 9 Comparison of wave contours caused by ring vortex and point doublet with z-directional axis in the case of $F_n=f=1$.

3. 渦システムによる造波グリーン関数の揚力面問題への適用

ここでは、水中翼に対する定常揚力面問題を、前章で展開した渦システムによる造波グリーン関数を核関数に用いることにより解き、水中翼に作用する揚力に及ぼす自由表面影響を算定する。

3.1 揚力面問題の定式化

ダブレット分布による揚力面は、2.1 節の考察により、区分的な渦格子に離散化されるから、核関数として 2.4 節に示す正鏡像渦を考慮したグリーン関数 G' を用いることによって、線型自由表面条件式 $[F]$ を満足する誘導速度場を構築できる。

実際、(7) 式に示す速度場 v を、(1) 式の翼面条件 $[H]$ に用いることにより、境界値問題は

$$[H] \quad \frac{1}{4\pi} \sum_j \Gamma_{\alpha_j} \oint_{C_j} \left(w_r + t_\eta \frac{\partial \tilde{G}'}{\partial z} \right)_{z=-f} ds = -1$$

但し、 $\Gamma_j = \alpha \Gamma_{\alpha_j}$, $G' = t_\eta \tilde{G}'$ (37)

のように定式化される。上式は、Fig. 10 に示すように分割された各渦格子内のコントロール・ポイント (×印) で満足することを要求されるから、離散的にはダブレット密度 Γ_{α_j} に関する連立 1 次方程式に帰着される。ここに、 Γ_{α_j} , \tilde{G}' は、それぞれ迎角 α や横渦成分 t_η に無関係に定まるように規格化した量である。また、(2) 式のクッタ条件 $[K]$ は、随伴渦として後縁パネルと同じ強さの馬蹄形渦を配することによって満足させ得るから、後縁ではそれに沿う渦糸は消滅する。

(37) 式を解いて離散的に得られた Γ_{α_j} から、揚力を求めることを考える。翼の上下面での無次元圧力差 δp は、ベルヌーイの定理により、線型化すれば

$$\begin{aligned} \delta p &= p|_{z=-f-0} - p|_{z=-f+0} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=-f+0} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=-f-0} \end{aligned} \quad (38)$$

のように、 x 方向の誘導速度の差によって定まる。翼に作用

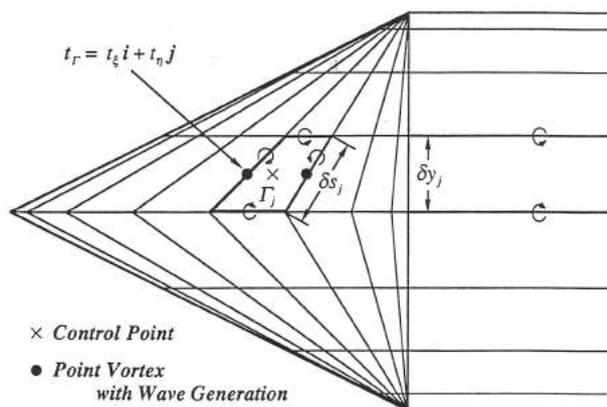


Fig. 10 Division of vortex lattice by the method of semi-circle for the delta wing.

する揚力 L は、これを翼面全体にわたって面積分し、前縁 ($x_L = -\frac{1}{2}$) では、ポテンシャルの跳びがないことを考慮すれば、

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x_L}^{x_r} \delta p dx dy \\ &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [\phi]_{z=-f+0} - [\phi]_{z=-f-0} \Big|_{x=x_r} dy \end{aligned} \quad (39)$$

によって求め得る。ここに、ダブレットの分布面上のポテンシャル値は、(4) 式に示すように、その面密度に相当するから、揚力 L は (37) 式で導入した Γ_{α} を用いて、

$$L = \alpha \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma_{\alpha} \Big|_{x=x_r} dy \quad (40)$$

のように、迎角 α に比例した形で書くことができ、後縁 ($x_r = \frac{1}{2}$) でのダブレット密度 Γ_{α_r} 、渦表現に換言すれば各スパンでの循環分布を、翼幅方向に積分することによって求め得ることを示している。

ここに、翼面積 $A_w (= \frac{b^2}{\Lambda})$ を規準にした通常の意味での揚力係数 C_L は、ここで求めた無次元揚力 L と、縦横比 Λ を介して、 $C_L = \frac{2\Lambda}{b^2} L$ のような関係にあるから、揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ は、離散的には

$$\begin{aligned} C_{L\alpha} &= \frac{dC_L}{d\alpha} \approx \frac{2\Lambda}{b^2} \sum_j \Gamma_{\alpha_j} \delta y_j \\ \text{但し、} \quad \frac{\Lambda}{b^2} &= \begin{cases} \frac{1}{\Lambda} & (\text{for 矩形翼}) \\ \frac{4}{\Lambda} & (\text{for 三角翼}) \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

によって求め得る。ここに Γ_{α_j} は後縁パネル周囲の単位迎角当りの渦糸強さに相当し、 \sum_j は後縁に沿ったスパン方向にのみ総和を取ることを意味する。

3.2 数値計算モデルの検討

グリーン関数を用いた計算に先立ち、 $\Lambda=4$ の矩形翼を対象に、無限流体中や、 $F_n \rightarrow 0$ なる低速極限で成立する剛壁条件下での試計算により、格子分割、コントロール・ポイント配置ならびに渦モデル等、離散化に対する数値計算モデルの検討を行なった。

Fig. 11 は、没水深度 $f \rightarrow \infty$ に相当する無限流体中の場合に対する検討結果をグラフ化したものであり、横軸に等分割の場合の格子幅に相当する平均格子長 $\delta s_m (= \frac{1}{M})$ を、縦軸に揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ を取って置点してある。格子分割は、 $\Lambda=4$ の矩形翼であることから、弦長、幅方向を $M \times 4M$ 分割で設定し、図中の括弧内に示している。渦モデルとして渦糸と渦点に集約した場合、分割手法として、セミ・サークル分割と等分割した場合について計算を行なった。但し、渦点の場合も、随伴渦については半無限長の渦糸として扱っている。また、コントロール・ポイントの配置および渦点の集約位置は、格子分割と同様な手法で設定することとし、格子分割がセミ・サークルの場合、標点の配置もセミ・サークルで行ない、等分割の場合の渦点はその中点に集約して行なった。ここに、セミ・サークル分割とは、弦長ある

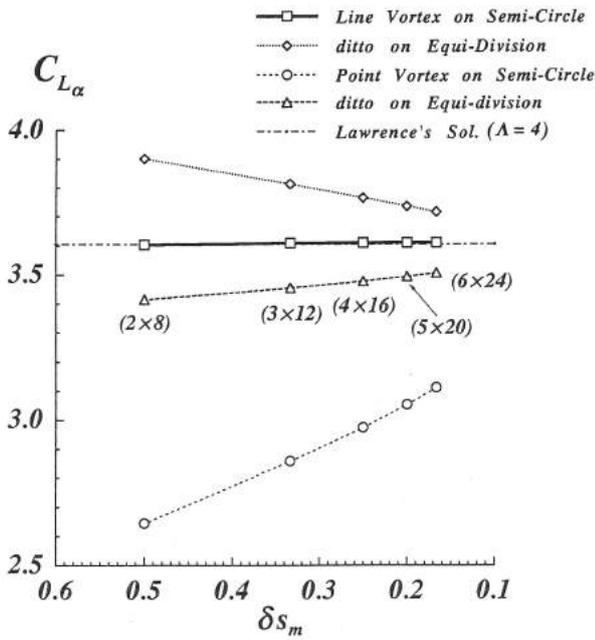


Fig. 11 Dependency of lift slope upon the mean lattice length for the rectangular wing with $\Lambda=4$ in the condition of unbounded fluid for the various lattice model.

いは翼幅を径とする半円の偏角を等分割することにより、自動的に端部ほど細分化するコサイン分割とも呼ばれる方法である。この図を見ると、どの手法を用いても、分割を細分化し格子長を短くするにつれて、揚力傾斜が線型的にある一定値に収束する傾向が現われている。中でも、渦糸でセミ・サークル分割した計算モデルが、 2×8 分割程度の粗い分割でも、最も細分化した 6×24 分割と同程度の値を得るように、分割数に対する依存性が弱く、粗い分割でも、低アスペクト比翼に対して信頼性の高い Lawrence の解¹⁴⁾と一致する結果を得ることから、この中では最も優れた計算モデルであることが分かる。次に良好な結果を与えるのは、最も粗い近似といえる等分割の渦点モデルであり、逆に渦点のセミ・サークル分割は、相当分割を細かくしても高精度な値は得られそうもなく、計算モデルとしては不適切といえる。ここに、渦糸としての誘導速度の計算は、(8)式に示す渦点によるそれを区分的な直線について線積分することによって得られた

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{aj}}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \nabla_P \times \frac{\mathbf{t}_r}{r} ds &= \frac{\Gamma_{aj}}{4\pi} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{h} \cdot \frac{\mathbf{t}_r \times \mathbf{e}_1}{\sin \theta_1} \\ &\underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma_{aj} r_1}{8\pi} \cdot \left| \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right| \cdot \mathbf{t}_r \times \mathbf{e}_1 \\ &\left(\begin{array}{l} \sin \theta_1 \rightarrow 0 \\ \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 > 0 \end{array} \right) \quad (42) \end{aligned}$$

によって行なった⁶⁾。ここに、 r_1, r_2 は渦糸の端点 s_1, s_2 から計算点 P に向かう動径方向の距離を表わし、 θ_1, θ_2 は、 s_1 か

ら s_2 に向かう渦糸の方向ベクトル \mathbf{t}_r (Fig. 10 に示す) と、動径方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ との張る角度であり、鏡像渦から翼面上への誘導速度を計算する際には、この動径ベクトルが z 成分を有することになる。半無限長の随伴渦糸の場合は、 $\theta_2 = \pi$ などとすることによって対応できる。また、 h は計算点 P から渦糸に下ろした垂線長である。(42)式の後者は、前者の分母・分子が共にゼロに漸近する場合の表示式で、これを用いることにより、直線渦の延長線近傍 ($h \rightarrow 0$) でも誘導速度は発散することなく求められ、延長線上や遠方では消失することが分かる。

Fig. 12 は、同様な翼について、正鏡像渦を配することにより剛壁条件を満足させた場合の計算精度を調査した結果である。縦軸には、Fig. 11 の結果から高精度を保證するモデルとして翼面渦、鏡像渦ともに渦糸(図中、*Line Vortex* と記す)で細分化した 6×24 のセミ・サークル分割による揚力傾斜に対する相対誤差を、それぞれの没水深度について百分率で表わした ϵ_L を取っている。この図から、翼面、鏡像渦面ともに等分割の渦点で置換した場合(図中、*Point Vortex* と記す)には、没水深度を深くするほど誤差は小さくなるものの、いくら分割を細分化しても数パーセントの誤差を生ずるようであり、十分な計算精度は保持できない。このことから、翼面渦は渦糸として取り扱い、鏡像渦のみ渦点で近似したモデル(図中、*Line & Point Vortex* と記す)で検討する。格子分割、標点配置ならびに渦点の集約位置ともにセミ・サークル分割で計算した結果を、Fig. 12

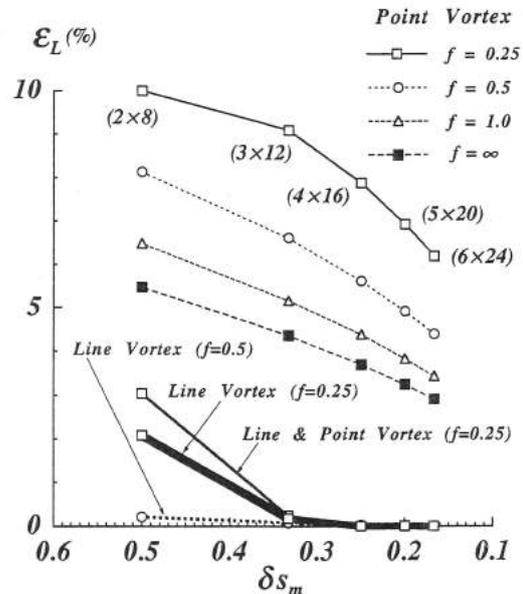


Fig. 12 Accuracy check of lift slope versus mean lattice length for the rectangular wing with $\Lambda=4$ in the condition of rigid wall for the various submerged depth.

に併せて置点した。これを見ると、 $f=0.25$ 程度の極端に没水深度が浅く分割が粗い場合には、鏡像渦を渦点で近似したことによる影響が現われるものの、ある程度分割を細かくすればその影響も消失する。特に、没水深度が深くなれば、その差は図には現われないほどであり、粗い分割でも誤差は0.2%程度しか生じない。

以上の検討と波紋に対する Fig. 6, 7 の結果より、実際の造波グリーン関数を用いた計算においても、 G' については、その特異性は(12)式からも分かるように鏡像渦と同じく $z=f$ にしかなく、その意味で鏡像渦による波動成分と解釈できるから、同様に鏡像面における渦糸を渦点に集約して計算を行なっても、さほど精度を劣化させることなく自由表面影響を考慮した揚力値を算定し得ると考えられ、計算を単純化する意味での利点も大きいため、今回の計算ではその置換を採用する。

3.3 水中翼に作用する揚力に及ぼす自由表面影響

水中翼に作用する揚力を、渦システムによる造波グリーン関数を核関数に採用することにより、自由表面影響を考慮した定常揚力面を解くことにより求める。数値解析に当っては、前節 Fig. 12 の考察に基づき、ベクトル・ポテンシャル項 v_r については渦糸として計算するものの、グリーン関数項 G' については、渦糸を区分的に渦点に集約することにすれば、(37)式の境界値問題は、

$$[H] \frac{1}{4\pi} \sum_j \left[\Gamma_{a_j} \sum_k \left\{ \int_{C_{j,k}} w_r ds + \frac{\partial \tilde{G}'}{\partial z} \tilde{t}_{n_j,k} \delta S_{j,k} \right\} \right]_{z=-f} = -1 \quad (43)$$

のように書き換えられ、中括弧内第1項については(42)式、第2項については(33)式を用いて計算できる。ここに、 \sum_k

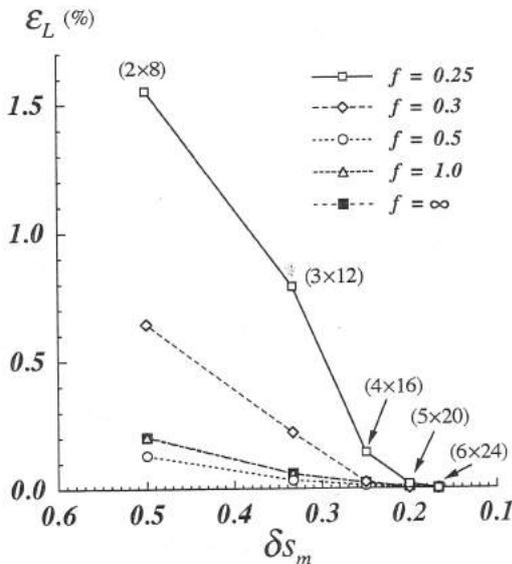


Fig. 13 Accuracy check of lift slope versus mean lattice length for the rectangular wing with $\Lambda=4$ in the case of $F_n=1$ for the various submerged depth.

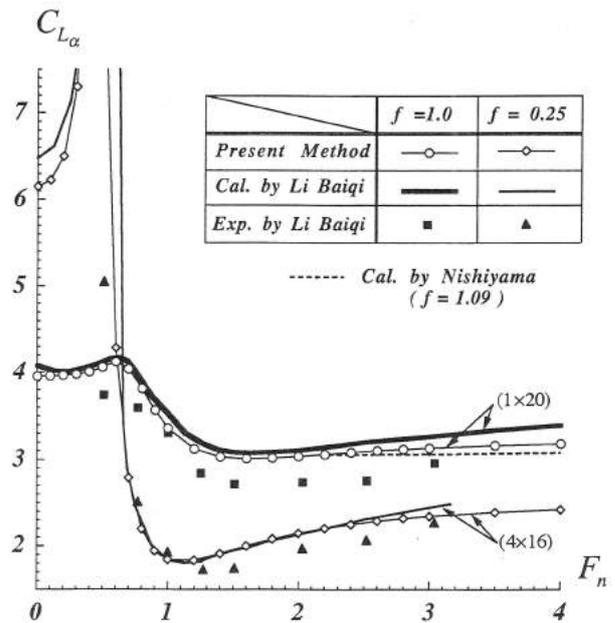


Fig. 14 Comparison of the lift slope versus Froude's number for the rectangular wing with $\Lambda=4$ between calculated values by present method, Li Baiqi and measured one in the case of $f=0.25, 1$.

は、 j 番目の渦格子を構成する周囲の直線渦糸を時計回りに連結することを意味する。

実際、今回は矩形翼、三角翼に対して計算を行ない、離散的に Γ_{a_j} ($j=1, 2, 3, \dots, N_r$) を決定した。前節での検討により、格子分割ならびにコントロール・ポイントの配置は共にセミ・サークル分割で行ない、グリーン関数を集約する点についても、区分的な直線渦の中点ではなくセミ・サークルで行なった。Fig. 10 は、三角翼をセミ・サークル分割した場合の格子生成例である。

Fig. 13 は、 $\Lambda=4$ の矩形翼がフルード数 $F_n=1$ で航行する場合について、Fig. 12 と同様、種々の没水深度について 6×24 分割時の揚力傾斜を規準にした相対誤差を平均格子長 δs_m ベースにグラフ化したものである。自由表面影響を考慮したこの場合も、剛壁条件に対する Fig. 12 と同様に、没水深度が浅いほど相対誤差は大きく生じるものの、この程度のフルード数では極端に浅い $f=0.25$ の場合でも、分割を 4×16 程度取れば誤差を0.2%以下に押しえることができることが分かり、本論のグリーン関数を用いた計算法においても、計算精度は十分保持されている。このことから、分割数と揚力傾斜の関係については、フルード数や没水深度にもよるが、ある程度粗い格子分割でも、少なくとも積分量である揚力値については、実用上十分な精度で求められるようであり、計算時間その他の面でも好都合である。

一方、Fig. 14 は、同様な翼に対して計算した揚力傾斜

$C_{L\alpha}$ をフルード数ベースに置点したものであり、没水深度 $f=0.25, 1$ の場合について、Li Baiqi の計算結果及び実験値⁹⁾ と比較した。両者の計算は、同様なグリーン関数法を採用し、同一の分割数で行なっているものの、本論で提案する方法は格子状の渦輪に対し渦点近似を採用していることから、馬蹄形渦に対する Li の方法に比べて計算アルゴリズムが単純であるにも拘わらず両者の一致度は良好であり、本計算法が実用的にも優れた解法であることを示している。また、実験値との比較においても、高速域で若干計算値の方が大き目に生ずるものの、揚力傾斜を実験的に算出することの難しさを考慮すれば、極端に浅い没水深度においても、計算値は定量的にも充分実験値を説明しており、本計算法の妥当性を示している。なお、参考までに、高速域に対して計算された西山の結果³⁾ を点線で示す。没水深度が $f=1.09$ で若干異なるものの、次の Fig. 15, 16 などを見てもこの程度の没水深度ではその差はさほど結果に影響しないと考えられることから、揚力面を近似的に1本の渦糸に置き換えた西山の方法によっても、縦横比 $\Lambda=4$ 程度の翼に働く高速域での揚力については、揚力面と同程度の精度で計算できるようである。

Fig. 15, 16 に、 $\Lambda=1, 2$ の場合の矩形翼, Fig. 17, 18 に、 $\Lambda=2, 4$ の三角翼に対する揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ の計算結果を示す。グラフは、種々の没水深度についてフルード数ベースに置点したものであり、それぞれ無限流体中の $C_{L\alpha\infty}$ に対する比で自由表面影響を表わしている。図のキャプションに記したそれぞれの分割数については、無限流体中の揚力値に対する検討の結果から設定したものである。特に三角翼については、Fig. 10 の格子分割例にあるように、(40)式に示す計算の都合上、スパン方向には x 軸に平行に切断し

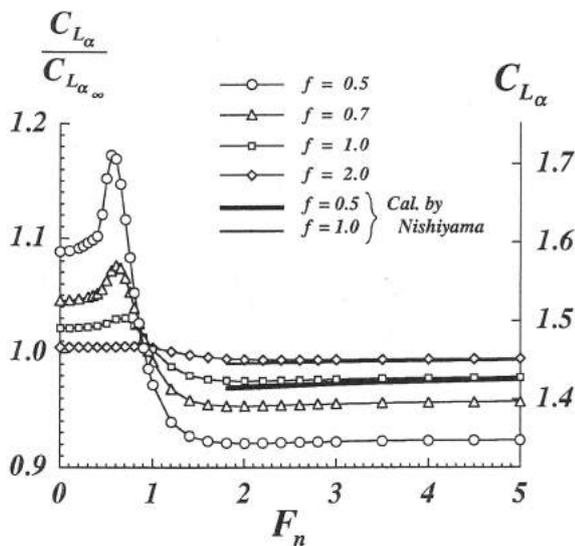


Fig. 15 Lift slope $C_{L\alpha}$ of rectangular wing with $\Lambda=1$ versus Froude's number for the various submerged depth in the division of 5×5 .

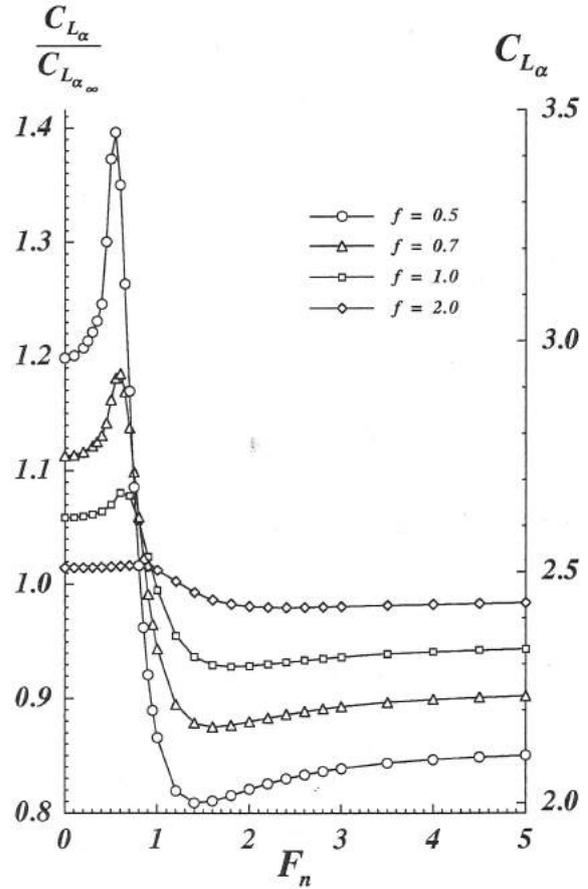


Fig. 16 Lift slope $C_{L\alpha}$ of rectangular wing with $\Lambda=2$ versus Froude's number for the various submerged depth in the division of 4×8 .

ていることから、アスペクト比が低い程、渦格子の斜辺長 δs_j は δy_j より相対的に長くなることもあって、たとえ渦糸のセミ・サークル分割で行なうにしても、ある程度スパン方向の分割数を確保しないと正確な揚力値を算定できないことから、そのような分割数を採用したものである。これ

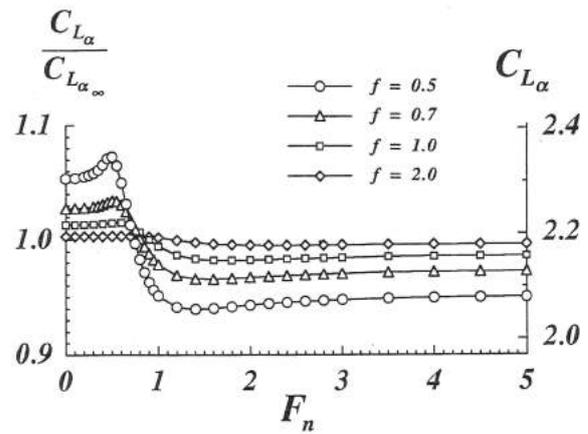


Fig. 17 Lift slope $C_{L\alpha}$ of delta wing with $\Lambda=2$ versus Froude's number for the various submerged depth in the division of 4×12 .

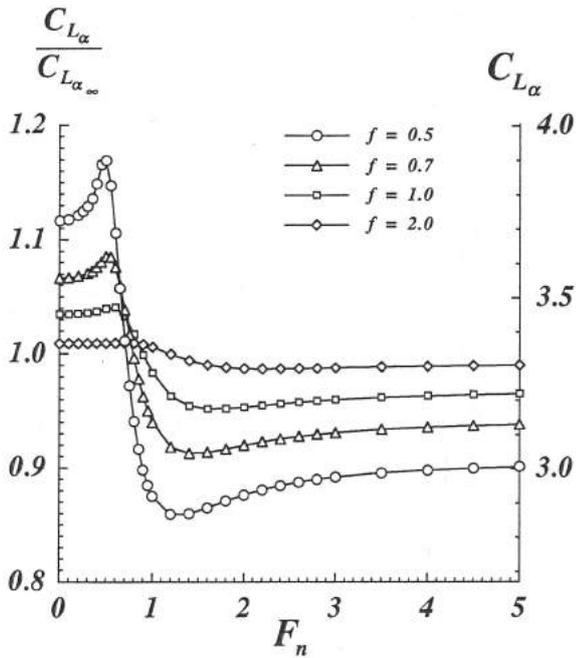


Fig. 18 Lift slope $C_{L\alpha}$ of delta wing with $\Lambda=4$ versus Froude's number for the various submerged depth in the division of 6×12 .

らの図から、縦横比 Λ が大きいほど揚力は自由表面影響を強く受けることが分かり、また形状別に見ると同じアスペクト比では、三角翼より矩形翼の方が明らかに自由表面の影響を強く受けることが分かった。一方、揚力値のフルード数に対する依存性は顕著に現われており、どの翼においても $F_n=1$ を境に、それより低速域でピークを迎え、高速域でボトム値を取るようであり、 $\Lambda=2$ の矩形翼が $f=0.25$ の浅深度を航走する場合、ピーク値とボトム値の相対幅は $C_{L\alpha\infty}$ の 60% にも及ぶ。なお、 $F_n \geq 3$ での超高速域では、揚力値はフルード数によらずほぼ一定値を取ることが分かり²⁾、 $F_n \rightarrow 0$ での低速極限值は、剛壁条件での揚力値に一致しており、グリーン関数を導入した本計算法の妥当性を示すものであろう。また、没水深度に対する依存性としては、翼弦長に対する相対深度 f が浅いほど、ピーク値とボトム値の幅が大きく生じ、自由表面影響を顕著に受け、ピーク値はより低速側で、ボトム値はより高速側で生じる傾向にある。ただ、深度 f が 1 を超えると、その依存性はかなり弱まり、特に $f=2$ 程度まで潜れば水面の影響を殆ど受けないことが分かる。従って、揚力傾斜自体は、概ね $F_n \leq 1$ の低速域では深度 f が浅いほど大きく、逆に $F_n \geq 1$ の高速域では、 f が深いほど大きく作用することになる。更に、 $\Lambda=1$ の正方形翼について、Fig. 15 に西山による計算結果³⁾ も併せて置点してみると、本論での計算値のより深い深度の場合と重なっており、このような低縦横比翼の場合では、西山の結果は、高速域での揚力傾斜を過大評価、自由表面影響について換言すれば過小評価するようであり、揚力線に対する揚力面補正の限界であろう。

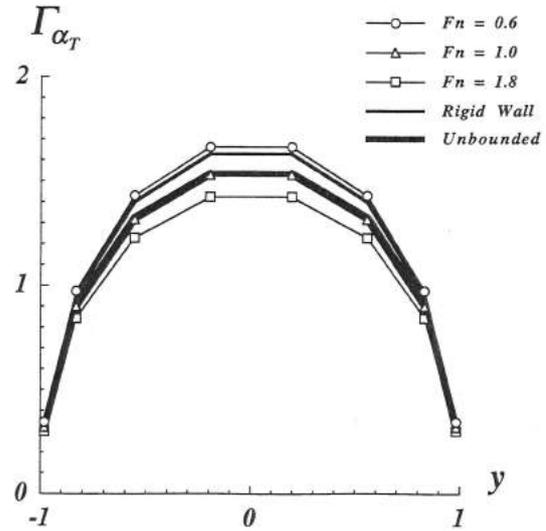


Fig. 19 Spanwise distributions of circulation on rectangular wing with $\Lambda=2$ for the various Froude's number in the case of $f=1$.

Fig. 19 には、Fig. 16 に示した $\Lambda=2$ の矩形翼が深度 $f=1$ で潜航する場合、後縁パネルでのダブルレットの面密度 Γ_{α_T} をスパン方向にわたって置点したものであり、(40)式により、スパン方向の循環分布に相当する。結果は、無限流体中と剛壁条件でのそれと併せて示しているが、どのフルード数でも楕円分布している様子が現われており、計算が正しく行なわれていることが分かる。実際、自由表面影響について見ると、揚力値がピークを取る $F_n=0.6$ では循環量も最大で、ボトム値での $F_n=1.8$ では循環量も最小に得られており、陽な対応となっている。一方、Fig. 20 は、同様な状態での、揚力傾斜のピーク値とボトム値を取る場合の波形 ζ_α を描いたものである。 ζ_α は渦強さ Γ_α に対応する単位迎角当りの波高であり、 $\zeta = \alpha \zeta_\alpha$ によって定義したも

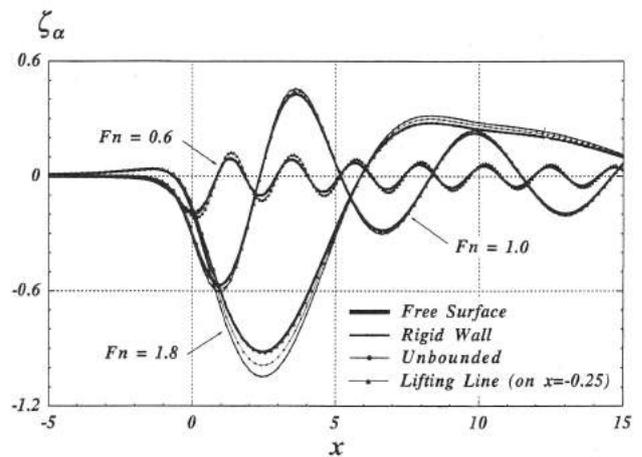


Fig. 20 Wave profiles generated by rectangular wing with $\Lambda=2$ for the various Froude's number, free surface conditions and vortex models in the case of $f=1$ on $y=0$.

のである。この図から、フルード数が大きくなると、波高ならびに波長が概ねその2乗程度に比例して大きくなる様子が分かる。図には、翼面渦のダブルレット強さとして、無限流体中や剛壁条件のもので近似した二重模型近似解に相当する波形や、Fig. 19に示すスパン方向の循環分布を $\frac{1}{4}$ 弦長点での揚力線で置き換えた場合についても示してある。これより、生成波に対する二重模型近似による誤差は、フルード数が高いほど自由表面の変形を無視できないことから大きく生じるのに対し、▲でマークした揚力面を揚力線近似した場合の差異は、フルード数が高い場合は殆ど無視できるのに対し、逆にフルード数が低くなると徐々に目立ってくる。これは、フルード数が低い場合、生成される波長そのものが短いことから、1本の揚力線に集約することによって誤差を生じたものであろう。ただし、この結果は深度 $f=1$ に対して得られたものであり、没水深度が浅くなれば、ここで行なった近似による影響もそれぞれ拡大されると考えられるものの、波のレベルにおいても分布渦を $\frac{1}{4}$ 弦長点に集約する近似は有効で、これをFig. 8の一定強さの渦輪の場合のように、ミッド・コードに集約すれば、位相がその分ズレることになる。

Fig. 21は、同様な $\Lambda=2$ の矩形翼が深度 $f=1$ を $F_n=1$ の速度で潜航する場合に誘起される波動場を等高線にしたものであり、上面に揚力面として扱った場合を、下面に $\frac{1}{4}$ 弦長点での揚力線で置換した場合について示している。揚力線で近似した方が、幾分波高が高目に生ずるものの、造波パターンとしては、位相も含めて良好に再現できているようである。また、Fig. 22は、同様な状態での造波パターンを鳥瞰図に表わしたものである。計算は、厳密に揚力面で計算した結果であり、Fig. 21の上面に対応する。

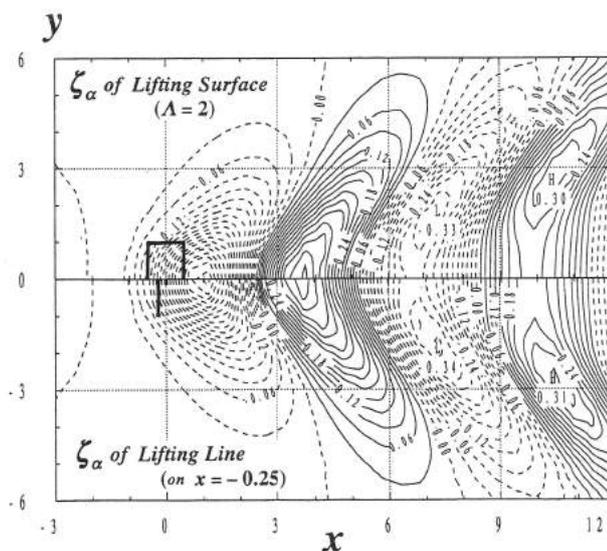


Fig. 21 Wave contours of the rectangular wing with $\Lambda=2$ in comparison between lifting surface and lifting line in the case of $F_n=f=1$.

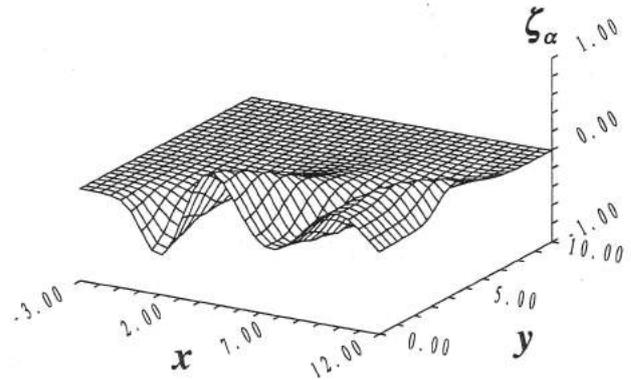


Fig. 22 Bird's-eye view of wave pattern generated by rectangular wing with $\Lambda=2$ in the case of $F_n=f=1$.

4. 結 論

本論では、渦システムに対する造波グリーン関数を構築し、それを定常揚力面の核関数に採用して数値解析することにより、水中翼に作用する揚力に及ぼす自由表面影響を算定したところ、次のような結論を得た。

i) 渦システムに対するグリーン関数を構築する際、その鏡像モデルに依存して造波特性に任意性を生ずるが、どのモデルを採用するにしても、渦輪として取り扱う限り、グリーン関数のレベルにおいても z 軸向きの面分布ダブルレットのそれと一致することから、解の一意性を証明し、それを数値的にも確認した。

ii) 剛壁条件を満たす正鏡像モデルを採用すれば、横渦のみから波を生じ、縦渦成分からは波を生じないことから、半無限長の随伴渦からの造波を考慮する必要がないなど、物理的にも数値解析の面でも優位性を持つことを示した。実際、その横渦成分に対する造波グリーン関数を構築し、その妥当性を微係数や、渦糸から生ずる波動場の計算例から明らかにした。

iii) 横渦成分に対する造波グリーン関数は、ベクトル・ポテンシャル項を除く波動項については、 x 軸向き点ダブルレットのグリーン関数と等価な形で得られるため、従来の計算プログラムを利用して、揚力面問題を数値解析することができることから、本計算法が実用的な解法になり得ることを示した。実際、それを渦格子法の核関数に用いる際、グリーン関数の計算を渦点に集約して行なう計算法を示し、その妥当性を剛壁条件下での試計算や造波パターンのレベルから確認した。

iv) 本計算法を $\Lambda=4$ の矩形翼に適用し、得られた揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ を、馬蹄形渦に対するグリーン関数法を用いたLiによる計算値や実験値⁵⁾と比較することにより、その有効性を確認した上で、幾つかの矩形翼と三角翼について揚力面問題を数値解析したところ、揚力に及ぼす自由表面影響については、アスペクト比が大きいほど、形状としては三

角翼より矩形翼の方が、顕著に受けることを示した。

v) 揚力傾斜 $C_{L\alpha}$ のフルード数に対する依存性としては、 $F_n=1$ を境に、それより低速域でピークを迎え、高速域でボトム値を取るようであり、 $F_n \geq 3$ での超高速域では、揚力値はフルード数によらずほぼ一定値を取ることが分かった。また、そのピーク値とボトム値の幅は、没水深度 f が浅いほど大きく生じ、自由表面影響を顕著に受けるものの、翼弦長の2倍程度まで潜れば水面の影響を殆ど受けないことを示した。

vi) 揚力面を、スパン方向の循環分布を合わせた等価な揚力線に置換して波動場を計算したところ、造波パターンレベルにおいても、 $\frac{1}{4}$ 弦長点に集約する近似は有効であることが分かった。

本論では、低アスペクト比翼の揚力に及ぼす自由表面影響の程度を知るために、基本的な形状として、矩形翼と三角翼について計算を行なったが、本手法は任意の翼形状やタンデム翼への適用も容易であるから、今後より複雑な場合に対して本手法を適用し、揚力に及ぼす自由表面影響を明らかにしていきたい。

終わりに臨み、渦システムによるグリーン関数の展開について、以前に貴重なご指導を戴きました大阪大学 助教授 松村清重先生に、厚く御礼申し上げます。なお、本論の数値解析は、すべて長崎総合科学大学 情報科学センターの NEC-EWS 4800/330 の C コンパイラを用いて行なったことを付記し、関係各位に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 鈴木勝雄：高速艇の流体力学(その2)、「高速艇と性能」シンポジウム・テキスト、第3章、日本造船学会(Jun. 1989), pp. 37~73.
- 2) 丸尾 孟：水中翼に及ぼす水面の影響に就て、造船協会論文集、第86号-前編-(Feb. 1953), pp. 43~58.
- 3) 西山哲男：全没揚力面の定常理論、造船協会論文集、第115号(Jun. 1964), pp. 10~20.
- 4) 中武一明、川越彦彦、片岡克己、安東 潤：水中翼に働く流体力の計算、西部造船会々報、第76号(Aug. 1988), pp. 1~13.
- 5) Li Baiqi: A Numerical Method for Calculating Hydrodynamic Characteristics of a Hydrofoil with Arbitrary Planform, 5th International High-Speed Surface Craft Conference, Southampton (May 1986), pp. L1~L16.
- 6) 経塚雄策、堀 勉、小寺山 亘：水中揚力体に加わる非定常流体力について(第一報 翼単独の場合)、日本造船学会論文集、第167号(Jun. 1993), pp. 43~53.
- 7) Brard, Roger: Viscosity, Wake, and Ship Waves, Jour. of Ship Research, Vol. 14, No. 4(Dec. 1970), pp. 207~240.
- 8) Tatinclaux, J.-C.: Effect of a Rotational Wake on the Wavemaking Resistance of an Ogive, Jour.

of Ship Research, Vol. 14, No. 2(Jun. 1970), pp. 84~99.

- 9) Beck, Robert F.: The Wave Resistance of a Thin Ship with a Rotational Wake, Jour. of Ship Research, Vol. 15, No. 3(Sept. 1971), pp. 196~216.
- 10) Havelock, T. H.: Wave Resistance, Proc. of the Royal Society, Series A, Vol. 118(Dec. 1927), pp. 24~33.
- 11) 中武一明：特異点による波紋について、西部造船会々報、第31号(Feb. 1966), pp. 1~18.
- 12) 堀 勉：定常造波における Neumann-Kelvin 問題の数値解析—(その1) 2次元没水円筒に対する検討—、長崎総合科学大学 紀要、第33巻 創立50周年記念号(Oct. 1992), pp. 161~184.
- 13) 姫野洋司、平野 進、北川和弘：水面滑走板の造波特性について、関西造船協会誌、第220号(Sept. 1993), pp. 7~16.
- 14) Lawrence, H. R.: The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds, Jour. of Aeronautical Sciences, Vol. 18, No. 10(Oct. 1951), pp. 683~695.

付録 A グリーン関数の自由波成分に対する計算法

横渦((32), (33)式)や z 軸向きダブレット((B-2), (B-3)式)に対するグリーン関数の自由波に相当する成分の計算法を示す。それらを一般化して複素表記すると、

$$F = \bar{A} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma \sec^2 \theta + i \gamma_0 \frac{\tilde{\omega}}{f} \sec^2 \theta} \cdot \sec^m \theta d\theta$$

$$\text{但し, } m = \begin{cases} 4(\text{for } G_z^+) \\ 5(\text{for } G_z^-, G_{b,z}) \\ 6(\text{for } G_{b,z}) \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{x} \cos \theta + \tilde{y} \sin \theta$$

$$\gamma_0 = \kappa_0 \tilde{f}$$

のようになる。上式 F は、 $t = \tan \theta$ なる変数変換を行ない、積分区間を数値的終端 T_∞ を境に2つに分けると、

$$F = \bar{A} \left(\int_{-\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}}^{T_\infty} + \int_{T_\infty}^{\infty} \right) \sqrt{1+t^2}^{m-2} \times e^{-\gamma_0(1+t^2) + i \gamma_0 \frac{\tilde{x} + \tilde{y}t}{f} \sqrt{1+t^2}} dt \quad (\text{A-2})$$

のように書くことができる。ここに、後者の区間における積分値が、要求精度 ϵ 以下になるように T_∞ を設定すれば、少なくとも数値的には前者のみで、 F の積分値に替えることができる。そのとき、振動因子を除き、 $t \gg 1$ での近似を行なうなどして、解析積分を可能な形にすれば、それぞれの場合について、

$$\bar{A} \int_{T_\infty}^{\infty} t^n e^{-\gamma_0 t^2} dt \leq \epsilon$$

$$\text{但し, } n = \begin{cases} 3(\text{for } m=4, 5) \\ 5(\text{for } m=6) \end{cases} \quad (\text{A-3})$$

を満たすように、数値的終端 T_∞ を決定すればよいことになる。これを陽な形ではないが、 T_∞ について解くと、

$$T_{\infty} = \sqrt{\frac{1}{\gamma_0} \log_e \left\{ \frac{\bar{A} \Psi(T_{\infty})}{2\gamma_0 \varepsilon} \right\}}$$

$$\text{但し, } \Psi(T_{\infty}) = \begin{cases} T_{\infty}^2 + \frac{1}{\gamma_0} & (\text{for } n=3) \\ T_{\infty}^4 + \frac{2T_{\infty}^2}{\gamma_0} + \frac{2}{\gamma_0^2} & (\text{for } n=5) \end{cases}$$

(A-4)

となり、繰り返し計算によって容易に T_{∞} を定め得る。実際の数値積分は、振幅、位相関数ともに、区分的に1次式で近似することにより、区間内で解析的に実行するフィロンの積分公式によって行なった。

付録 B z 軸向きダブレットのグリーン関数の計算式

2.3節(21)式に示した z の負軸向きダブレットによるグリーン関数 G_b の微係数に対する計算式を、2.4節で横渦のグリーン関数に対して行なったと同様な手法を用いて導いておく。

まず、(21)式の G_b は、3項に分解して、

$$G_b = \frac{\partial}{\partial f} \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \theta}{\bar{f} - i\bar{\omega}} d\theta$$

$$- \frac{\kappa_0^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^4 \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\bar{f} + ik\bar{\omega}}}{k - \kappa_0 \sec^2 \theta - i\mu \sec \theta} dk$$

(B-1)

のように変形できる。ここに、第1項は、水面に関する鏡像位置に配された主要解と同じく z の負軸向きダブレットを表わし、逆鏡像モデルとなっていることが分かる。

上式より、 G_b の x 及び z 方向の微係数を求め、 k に関する

半無限積分に対し、(28)式に示す積分指数関数表記を用いることにより、主要解も含めて記すと、

$$\frac{\partial G_D}{\partial x} = -3(x - \xi) \cdot \left(\frac{z+f}{r^5} - \frac{\bar{f}}{r^5} \right)$$

$$+ \frac{2\kappa_0^3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} G_{b_x}^*(\theta) d\theta$$

$$+ 4\kappa_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{-f^*} \cos \omega^* \sec^5 \theta d\theta$$

(B-2)

$$\frac{\partial G_D}{\partial z} = \frac{r^2 - 3(z+f)^2}{r^5} + \frac{r^2 - 3\bar{f}^2}{r^5}$$

$$- \frac{2\kappa_0^3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} G_{b_z}^*(\theta) d\theta$$

$$+ 4\kappa_0^3 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}+\theta} e^{-f^*} \sin \omega^* \sec^6 \theta d\theta$$

(B-3)

のようになる。ここに、 $G_{b_x}^*$ は、(35)式の横渦に対する G_z^* に等しいから、 $G_{b_z}^*$ について漸近解も含めて記すと、

$$G_{b_x}^*(\theta) = G_z^*(\theta) \Big|_{\text{Eq. (35)}} \quad (\text{B-4})$$

$$G_{b_z}^*(\theta) = \left\{ \frac{f^{*2} - \bar{\omega}^{*2}}{(\bar{\omega}^{*2} + f^{*2})^2} + \frac{f^*}{\bar{\omega}^{*2} + f^{*2}} \right. \\ \left. - e^{-f^*} (E_c \cos \omega^* - E_s \sin \omega^*) \right\} \cdot \sec^6 \theta$$

$$\sim_{R^* \rightarrow \infty} - \sum_{n=3}^N \frac{(n-1)! \cos^{2n-6} \theta}{(\kappa_0 \sqrt{\bar{\omega}^2 + \bar{f}^2})^n} \cdot \cos \left\{ n \left(\Omega - \frac{\pi}{2} \right) \right\}$$

(B-5)

のようになり、これによって局部波成分を計算できる。

一方、(B-2)、(B-3)両式の第3項による自由波成分の計算法については、付録Aに記す。