第７章　付帯条件付き変分問題 ― 等周問題 ―

前章では，定積分の形で与えられる汎関数を，ある境界条件の下で，停留値にする関数を求めることを考えてきた．本章では，これ以外の条件が，定積分の形で付け加えられる場合を考える．

このような付帯条件付き変分問題として最も典型的なものは，所謂"等周問題"，即ち"周囲の長さが一定の閉曲線の中で，その囲む面積が最大のものを求めよ！"と云う問題であろう．本章では，この様な問題の取り扱い方について説明しよう．

§7.1　等周問題

本節では，前章(6.4)式で定義した汎関数 $J[y]$

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx \quad \cdots\cdots (7.1)$$

の他に，同様な汎関数

$$K[y] = \int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')\,dx \quad \cdots\cdots (7.2)$$

が与えられている場合を考えよう．$K[y]$ の値が，

$$K[y] = \ell \quad (= Const.) \quad \cdots\cdots (7.3)$$

のように指定されているとき，この付帯条件を満足するような $y = y(x)$ のうちで，$J[y]$ を停留にする問題を"**等周問題**"と云う．周囲の長さが一定の閉曲線のうちで，その囲む面積が最大のものを求める問題が，この種のものに属するので，この名が起こった．

このような，付帯条件付きの変分問題においては，"**ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数**"を導入することにより取り扱いが便利にある．今，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数を λ とすると，上の問題は，(7.1)式の $J[y]$ と(7.3)式の $K[y]-\ell=0$ を，未定乗数 λ を介して結合した

$$\begin{aligned} H[y] &= J[y] + \lambda\Big(K[y] - \ell\Big) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx + \lambda\left(\int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')\,dx - \ell\right) \quad \cdots\cdots (7.4) \end{aligned}$$

なる汎関数 $H[y]$ を，(6.5)式の境界条件

$$\left.\begin{aligned} y(x_1) &= y_1 \\ y(x_2) &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7.5)$$

の下で，停留にする解を求める問題に帰着される．

そこで，(7.4)式の汎関数 $H[y]$ の第１変分 δH を求めることを考えよう．このとき，変分を受けるのは，J と K と λ であることから，δH は，

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta J + \lambda\,\delta K + \Big(K[y] - \ell\Big)\delta\lambda \\ &= \delta J + \lambda\,\delta K \quad \cdots\cdots (7.6) \end{aligned}$$

となる．ここに，$\delta\lambda$ を因数に持つ第３項は，(7.3)式の付帯条件から消したものである．式中の第１変分 δJ, δK は，(6.22)式と同様な計算を進めると，

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx + \lambda\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial y'}\delta y'\right)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'}\delta y'\right\}dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y'\right)dx \quad \cdots\cdots (7.7) \end{aligned}$$

のように書くことができる．式中の F^* は，F と G を λ を介して纏める為，

$$F^* = F + \lambda G \quad \cdots\cdots (7.8)$$

と置いたものである．更に，

$$\delta y' = \frac{d}{dx}\delta y \quad \cdots\cdots (7.9)$$

であることを用いて，部分積分して変形すると，

$$\delta H = \left[\frac{\partial F^*}{\partial y'}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y - \frac{d\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)}{dx}\delta y\right\}dx \quad \cdots\cdots (7.10)$$

となるが，(7.5)式の境界条件を満たす為に，変分 $\delta y(x)$ は，

$$\left.\begin{aligned}\delta y(x_1) &= 0\\ \delta y(x_2) &= 0\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7.11)$$

を満足するように選ぶから，第１項は消失し，

$$\delta H = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)\right\}\delta y(x)\,dt \quad \cdots\cdots (7.12)$$

を得る．ここに，(7.4)式の汎関数 $H[y]$ 停留条件は，

$$\delta H = 0 \quad \cdots\cdots (7.13)$$

であるが，これは，(7.6)式から分かるように $\delta J = -\lambda\delta K$ なる関係を有する，共にｾﾞﾛでない δJ , δK を求める条件に相当する．この停留条件を任意の $\delta y(x)$ 対して満足させるには，(7.12)式より，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right) = 0\\ &\text{但し，}\quad F^* = F + \lambda G\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7.14)$$

が成立する必要がある．これは，前章(6.20)式のｵｲﾗｰの方程式の F を F^* で置き換えたものに他ならない．このように，付帯条件付きの変分問題も，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭ乗数を導入することにより，前章で述べたような付帯条件無しの変分問題と全く同様な取り扱いができることが，理解されるであろう．

従って，(7.14)式の微分方程式を，境界条件式(7.5)の下で解くことによって，停留解が得られるのである．尚，このときの停留解は，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭ乗数 λ を含んだ形として得られる為，その解 $y(x)$ を(7.3)式の $K[y]$ に入れ戻すことにより，乗数 λ を決定し得ることになる．

§7. 2　多くの関数がある場合 の 等 周 問 題

本節では，前章 6. 4 節で述べた多関数に対する変分問題に，付帯条件を付与した場合について考える．

ここでも，(6.58)式と同様，t を独立変数として，２つの未知関数 $x=x(t)$ と $y=y(t)$ による汎関数 $J[x,y]$

$$\left.\begin{aligned}&J[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt\\ &\text{但し，}\quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}\ ,\ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7.15)$$

を，(6.59)式と同様な境界条件

$$\left.\begin{aligned}x(t_1) &= x_1\ ,\quad y(t_1) = y_1\\ x(t_2) &= x_2\ ,\quad y(t_2) = y_2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7.16)$$

と，付帯条件

$$\left.\begin{aligned} & K[x,y]-\ell=0 \\ & \text{但し,}\quad K[x,y]=\int_{t_1}^{t_2} G(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots (7.17)$$

の下で停留にする問題を解いてみよう.

前節と同様，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数をλとすると，上の問題は,

$$\begin{aligned} H[x,y] &= J[x,y]+\lambda\Big(K[x,y]-\ell\Big) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dx+\lambda\left(\int_{t_1}^{t_2} G(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dx-\ell\right) \quad\cdots\cdots (7.18) \end{aligned}$$

なる汎関数 $H[x,y]$ を，停留にするに解 $x(t)$, $y(t)$ を求める問題に帰着される.

さて，(7.18)式の第１変分 δH は,

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta J+\lambda\,\delta K+\Big(K[y]-\ell\Big)\delta\lambda \\ &= \delta J+\lambda\,\delta K \quad\cdots\cdots (7.19) \end{aligned}$$

によって求め得る．ここに，$\delta\lambda$ を因数に持つ第３項は，(7.17)式の付帯条件により消失した．式中の第１変分 δJ, δK は，(6.61)式と同様な計算により,

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right)dt+\lambda\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\delta x+\frac{\partial G}{\partial y}\delta y+\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}+\frac{\partial G}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}+\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right\}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial F^*}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}+\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right\}dt \quad\cdots\cdots (7.20) \end{aligned}$$

のように表記できる．式中の F^* は，(7.8)式と同様,

$$F^*=F+\lambda G \quad\cdots\cdots (7.21)$$

と置いたものである．更に，部分積分して変形すれば，(6.63)式の F を F^* で置き換えた形として,

$$\delta H=\left[\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\delta x+\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\delta y\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial F^*}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F^*}{\partial y}\delta y-\frac{d\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)}{dt}\delta x-\frac{d\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right)}{dt}\delta y\right\}dt \quad\cdots (7.22)$$

のように得られ，(7.16)式の境界条件を満たす為に，変分 $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ は,

$$\left.\begin{aligned} \delta x(t_1)=0\,,\quad \delta y(t_1)=0 \\ \delta x(t_2)=0\,,\quad \delta y(t_2)=0 \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots (7.23)$$

を満足するように選ばれるから，(7.22)式の第１項は消失し,

$$\delta H=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left\{\frac{\partial F^*}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta x+\left\{\frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right)\right\}\delta y\right]dt \quad\cdots\cdots (7.24)$$

を得る．ここに，(7.18)の汎関数 $H[x,y]$ の停留条件は,

$$\delta H=0 \quad\cdots\cdots (7.25)$$

であるから，任意の変分 $\delta x(t)$, $\delta y(t)$ に対して成立する為には，やはり(6.67)式の F を F^* で置き換えた形として，結局 $H[x,y]$ の停留条件は,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \\ &\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \\ &\qquad \text{但し,}\ F^* = F + \lambda G \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7.26)$$

として得られる．このように2つの未知関数がある場合の付帯条件付きの変分問題も，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数を導入することにより，6.4 節の付帯条件無しの変分問題と全く同様な取り扱いができることが分かり，前節と同様な状況である．

【例題 7.1】

周の長さ ℓ を持ち，全く交叉しない平面曲線の内，面積を最大にする曲線を求めよ．

［解］この平面曲線が，

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \quad (\text{但し,}\ t_1 \leq t \leq t_2) \cdots\cdots (7.27)$$

のように，x, y 共に媒介変数 t を介してﾊﾟﾗﾒﾀｰ表示されたとする．ここに，$x(t), y(t)$ は t の連続微分可能な関数と考える．また，曲線は閉じているから，

$$\left.\begin{aligned} x(t_1) &= x(t_2) = x_0 \\ y(t_1) &= y(t_2) = y_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7.28)$$

である．

まず，準備として，このようなﾊﾟﾗﾒﾀｰ表示された閉曲線の面積 S を求めることを考えよう．そこで，4.2 節で導いたｶﾞｳｽの公式を思い起こそう．

(4.13)式において，$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1$ と置けば，$F(x,y) = y$ となるから，閉曲線 c で囲まれた領域 D 内の面積 S は，

$$S = \iint_D dx\,dy = -\oint_c y\,dx \cdots\cdots (7.29)$$

のように，閉曲線 c に沿った x に関する線積分によって求め得る．ここに，積分路 c の回り向きは，正の反時計回りとする． 一方，(4.14)式において，$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1$ と置けば，$F(x,y) = x$ となるから，同じく面積 S は，

$$S = \iint_D dx\,dy = \oint_c x\,dy \cdots\cdots (7.30)$$

のように，y に関する線積分によっても求め得る．よって，(7.29)，(7.30)両式の相加平均を取った形式で，

$$S = \frac{1}{2}\oint_c \left(x\,dy - y\,dx\right) \cdots\cdots (7.31)$$

を得る．ここに，x, y が(7.27)式のように媒介変数 t を介し表記されれば，

$$\left.\begin{aligned} dx &= \dot{x}\,dt \\ dy &= \dot{y}\,dt \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7.32)$$

であるから，(7.31)式を t に関する積分に書き直せば，面積 S のﾊﾟﾗﾒﾀｰ表記として，

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt \cdots\cdots (7.33)$$

を得る．

以上の準備計算を踏まえ，(7.27)式の閉曲線の面積を表わす汎関数 $J[x,y]$ は，

$$J[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)dt \cdots\cdots (7.34)$$

であり，その曲線の周長が ℓ で規定されているから，付帯条件としては，

$$K[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} G(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt = \oint \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \ell \qquad \cdots\cdots (7.35)$$

のように書ける．この問題は，正しく7.2節の等周問題に他ならない．

このとき，(7.34)，(7.35)式より，

$$\left.\begin{aligned} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) &= \frac{1}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) \\ G(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7.36)$$

であるから，(7.8)式の F^* を構成してみると，

$$F^*(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \qquad \cdots\cdots (7.37)$$

となる．ここに，λ はﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数である．従って，F^* に対するｵｲﾗｰの方程式は，(7.26)式により，x，y それぞれに関して，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{\dot{y}}{2} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{y}{2} + \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \\ \frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}}\right) &= -\frac{\dot{x}}{2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2} + \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7.38)$$

のように得られる．ここに，

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7.39)$$

であることを考慮して，(7.38)式を変形すれば，

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(y - \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(x + \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7.40)$$

となる．それぞれを，t に関して1階積分することにより，

$$\left.\begin{aligned} y - \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= c_2 \\ x + \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= c_1 \end{aligned} \quad (\,c_1,\ c_2 : \text{任意定数}\,)\right\} \qquad \cdots\cdots (7.41)$$

を得る．この2つの式を連立させ，λ を消去すれば，

$$\frac{y - c_2}{x - c_1} = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$$
$$= -\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{dx}{dy} \qquad \cdots\cdots (7.42)$$

となる．この微分方程式を

$$\int \left(y - c_2\right) dy = -\int \left(x - c_1\right) dx \qquad \cdots\cdots (7.43)$$

のように，x と y について変数分離の形で積分することにより，

$$\left.\begin{aligned} &\left(x - c_1\right)^2 + \left(y - c_2\right)^2 = c_3 \\ &\qquad\qquad \text{但し，} c_3 : \text{未定定数} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (7.44)$$

を得，(7.41)式を代入て未定定数 c_3 を定めると，

$$c_3 = \lambda^2 \frac{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}{\left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right)^2} = \lambda^2 \qquad \cdots\cdots (7.45)$$

となる．このことから，(7.44)式は，

$$\left(x - c_1\right)^2 + \left(y - c_2\right)^2 = \lambda^2 \qquad \cdots\cdots (7.46)$$

と書くことができ，この曲線は，中心を (c_1, c_2) 有する半径 λ の円を表わす．これを，媒介変数 t を用いて表記すると，

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1 + \lambda \cos t \\ y &= c_2 + \lambda \sin t \end{aligned} \quad (\text{但し，} 0 \leq t < 2\pi) \right\} \quad \cdots\cdots (7.47)$$

となるから，(7.35)式の付帯条件に入れ戻すことにより，

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\lambda \sin t)^2 + (\lambda \cos t)^2}\, dt = \lambda \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= \lambda \int_0^{2\pi} dt = \lambda \left[t \right]_0^{2\pi} = 2\pi\lambda \quad \cdots\cdots (7.48) \end{aligned}$$

を得る．これにより，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの未定乗数 λ は，

$$\lambda = \frac{\ell}{2\pi} \quad \cdots\cdots (7.49)$$

のように定まり，円周 ℓ から円の半径 λ を求めたことに相当する．

以上の結果より，最終的に求める変分問題の解は，

$$\left(x - c_1\right)^2 + \left(y - c_2\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^2 \quad \cdots\cdots (7.50)$$

であることが分かり，周長 ℓ の閉曲線で，面積を最大にする曲線は，半径 $\frac{\ell}{2\pi}$ の円であることを示している．