

日本航海学会誌

NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

停留位相法による船の波の計算
— その2 : Kelvin波とHogner波の接続解 —

堀 勉

Calculation of Ship Waves by means of Stationary Phase Method
— *Part 2 : Connection between Kelvin wave and Hogner Wave* —

Tsutomu HORI



令和2年

4月

第212号

研究・調査

停留位相法による船の波の計算 — その2 : Kelvin波とHogner波の接続解 —

堀 勉

Calculation of Ship Waves by means of Stationary Phase Method

— Part 2 : Connection between Kelvin Wave and Hogner Wave —

Tsutomu HORI

キーワード: 船の波, ケルビン波, オグナー波, 接続解, 停留位相法

1. 序 論

船の起こす波の波紋は, Lord Kelvin⁽¹⁾が停留位相法を用いた解析により, 初めて描いた歴史的経緯から, 現在では Kelvin 波と称されて, その解析は船舶流体力学の教科書^{(2),(3),(4)}に記載される, 先駆的な理論である.

Kelvin 波の象徴的な結果は, 後方へ伝播する横波成分と, 八の字状に広がる縦波成分を表わす波頂線図として描かれることが殆どで, 実際に停留位相法を用いて, 波高値そのものを計算し, 定量的に議論することは余り成されてこなかった.

一方, Kelvin の解析によって, 波高値が後流では $\frac{1}{\sqrt{x}}$ で減衰することが明らかになり, この漸近特性を用いて, 縦切断波形解析法における所謂 Newman 修正が提案され, 実験解析法として確立されている.

このような状況に鑑み, 前報⁽⁵⁾では, 最も単純化した船の波として, 一様流中に没水する点吹き出しが起こす波の波高値を, 実際に停留位相法を用いて計算し, その結果を波紋図や鳥瞰図で可視化することにより, Kelvin 角の内側においては, 生成波の振幅関数を数値的に積分して計算される後続自由波の様子を, 予想以上に良く捉えていることを示した.

しかし, Kelvin 波の外縁 (Kelvin 角) 近傍では, 停留位相法の仮定そのものが破綻する (位相関数の 2 階微係数がゼロとなる) ことから, 波高値が発散する問題が残った.

この問題に関して, 数学的には Hogner⁽⁶⁾によって, Kelvin⁽¹⁾が省略した高次項である, 位相関数の 3 階微係数を考慮することにより, Kelvin 角上でも波高値は発散することなく, 漸近特性として $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ で減衰することが示されている.

只, この解析による Hogner 波についても, Kelvin 波と同様, 波高値そのものを実際に計算し, Kelvin 波と, その外縁近傍でどのように接続しているかについての議論は, 成されるままの状況である.

この両者の解析解の性質を定量的に把握し, その接続解を得ることも, 造波理論の観点からは, 興味あるところである.

他方, 最近でも, Keller & Abluwalia⁽⁷⁾や, 松村ら^{(8),(9)}は, Kelvin 角の内外を通して一様に, Airy 関数を用いて, 後続自由波を表現できることを示した.

本稿では, 上記 Keller や松村らの立場とは別に, Kelvin 角の内側を対象に, Hogner の解析を更に一

歩進めて、位相関数の展開形における2階微係数と3階微係数を共存させた解析を試み、数値積分により Kelvin 波と Hogner 波の接続解として、ある程度の知見を得たので、不十分な部分も多いが、ここにご報告し、諸賢のご批判を仰ぐ次第である。

2. 点吹き出しの起こす波

船の波として、前報⁽⁵⁾と同様、点吹き出しの起こす波を対象に、解析を進める。

図1に示すような $O-XYZ$ 座標系で、一様流 U の中に、強さ $M = \frac{1}{16}UD^2$ の点吹き出しが、原点直下、没水深度 F の位置 $(0,0,-F)$ に置かれたときに生成される後続波の波高 Z_f は、前報⁽⁵⁾により、 $y \geq 0$ なる右舷側に対して、

$$Z_f = \frac{K_0 D^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-K_0 F \sec^2 \theta} \times \cos(K_0 P \sec^2 \theta) \sec^3 \theta d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{但し、} \begin{cases} K_0 = \frac{g}{U^2} \left(= \frac{2\pi}{\lambda} \right) \\ P = X \cos \theta + Y \sin \theta = R \cos(\theta - \Theta) \\ R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \Theta = \tan^{-1} \frac{Y}{X} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

によって計算できる。ここに、 K_0 は波数、 P は素成波の伝播方向 θ への進行距離、 D は吹き出しによる分岐流線の後流断面での円の直径である。以下、この直径 D を規準に、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_f &\equiv \frac{Z_f}{D}, f \equiv \frac{F}{D} \\ \kappa_0 &\equiv K_0 D = \frac{1}{Fn^2}, Fn \equiv \frac{U}{\sqrt{gD}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_0}} \\ x &\equiv \frac{X}{D}, y \equiv \frac{Y}{D}, r \equiv \frac{R}{D} \\ p &\equiv \frac{P}{D} = x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos(\theta - \Theta) \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

のように、全て無次元表記して扱う。式中の Fn は、 D を規準にしたフルード数である。

無次元化した後続自由波の波高 ζ_f は、式中の $y \geq 0$ なる右舷側 ($0 \leq \Theta \leq \pi$) に対し、

$$\zeta_f = \frac{K_0}{4} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta} \cos(\kappa_0 p \sec^2 \theta) \sec^3 \theta d\theta \dots(3)$$

のように、表記できる。被積分関数中の位相関数は、微係数を求める際の計算の便を図って、主パラメタを、前報⁽⁵⁾の r から x に変更することにより、

$$\begin{aligned} \kappa_0 p \sec^2 \theta &= \kappa_0 (x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta \\ &= \kappa_0 x (1 + \tan \Theta \tan \theta) \sec \theta \\ &\equiv \kappa_0 x \varpi(\theta) \end{aligned} \dots(4)$$

のように書ける。(3)式の波高 ζ_f を、

$$\zeta_f = \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\theta) \cos\{\kappa_0 x \varpi(\theta)\} d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{但し、} \begin{cases} \Psi(\theta) = \frac{K_0}{4} e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ \varpi(\theta) = (1 + \beta \tan \theta) \sec \theta \\ \beta \equiv \tan \Theta = \frac{y}{x} \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots(5)$$

のように纏めて表記して、次節以降の解析を進める。

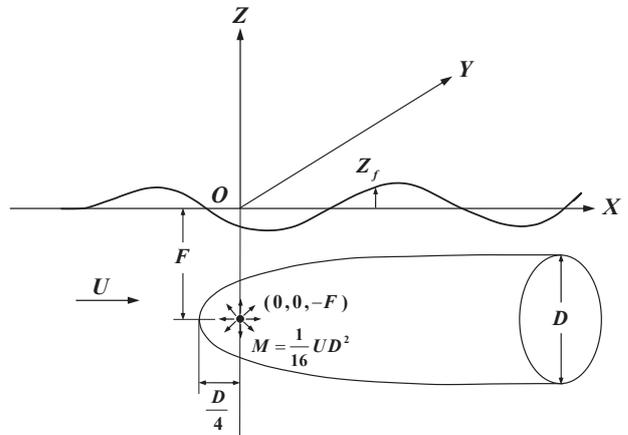


図1 点吹き出しが起こす波の座標系

3. 停留位相法による解析

ζ_f に対する(5)式の被積分関数の停留点は、位相関数中の $\varpi(\theta) = (1 + \beta \tan \theta) \sec \theta$ の微係数が、

$$\varpi'(\theta) = \sec \theta (2\beta \tan^2 \theta + \tan \theta + \beta) \dots(6)$$

となるから、停留条件 $\varpi'(\theta_j) = 0$ を満たすためには、

$$2\beta \tan^2 \theta_j + \tan \theta_j + \beta = 0 \dots(7)$$

となる必要がるから, 停留点 $\theta_j (j=1,2)$ は,

$$\theta_j = \tan^{-1} \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1-8\beta^2}}{4\beta} \right) \dots\dots\dots(8)$$

によって求められる. 1つの計算点 $\beta (= \tan \Theta)$ に対して θ_j は 2点存在し, 複号土の上が θ_1 の横波成分, 下が θ_2 の縦波成分の伝播方向であり, $|\theta_1| < |\theta_2|$ の関係にある. このとき, 停留点では,

$$4\beta \tan \theta_j + 1 = \pm \sqrt{1-8\beta^2} \dots\dots\dots(9)$$

の関係も成立する.

(5)式の波高 ζ_f は, その位相関数を停留点 θ_j 回りにテーラー展開することにより,

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon} \cos \left[\kappa_0 x \left\{ \varpi(\theta_j) + \frac{1}{2!} \varpi''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^2 + \frac{1}{3!} \varpi'''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^3 \right\} \right] d\theta \dots\dots\dots(10)$$

のように, θ_j 近傍での積分で評価できる. \cos 関数を加法定理で展開することにより,

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \left\{ \begin{aligned} & \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon} \cos(\kappa_0 x \Omega(\theta)) d\theta \\ & - \sin(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{\theta_j-\varepsilon}^{\theta_j+\varepsilon} \sin(\kappa_0 x \Omega(\theta)) d\theta \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} & \text{但し, } \Omega(\theta) \equiv \frac{1}{2} \varpi''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^2 + \frac{1}{6} \varpi'''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^3 \\ & \dots\dots\dots(11) \end{aligned} \right\}$$

と書いて, 解析する. ここに, 式中の位相関数 $\Omega(\theta)$ において, $\varpi'''(\theta_j) = 0$ として 3階微係数を省略して計算したものが, 前報⁽⁵⁾の Kelvin 波⁽¹⁾, $\varpi''(\theta_j) = 0$ となる外縁を対象に, 3階微係数のみで計算したのが Hogner 波⁽⁶⁾であり, 共に積分値を解析的に評価できる.

本稿では, $\Omega(\theta)$ 中の 2階微係数と 3階微係数を共存させ, 数値積分により(11)式を評価し, Kelvin 波と Hogner 波の接続解を求める.

3.1 Kelvin 波としての解析

前節(11)式において, $\varpi'''(\theta_j) = 0$ とし,

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} \kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|} (\theta - \theta_j) \dots\dots\dots(12)$$

と置いて, 積分変数を θ から φ に置換し,

$\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} \kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|} \rightarrow \infty$ となるように ε を設定すれば, 自由波の波高 ζ_f は,

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \frac{2\Psi(\theta_j)}{\sqrt{\frac{1}{2} \kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|}} \times \left\{ \begin{aligned} & \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_0^\infty \cos \varphi^2 d\varphi \\ & \mp \sin(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_0^\infty \sin \varphi^2 d\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots(13)$$

となる. 式中の半無限区間の積分は Fresnel 積分に帰着されて,

$$\int_0^\infty \cos \varphi^2 d\varphi = \int_0^\infty \sin \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \dots\dots\dots(14)$$

のように確定できるから⁽¹⁰⁾, 波高 ζ_f は,

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \sqrt{\frac{\pi}{\kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|}} \times \left\{ \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \mp \sin(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \right\} \dots\dots(15)$$

となる. $j=1, 2$ に対して, 2項を合成して \cos 関数で書くと,

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|}} \cos \left(\kappa_0 x \varpi(\theta_j) \pm \frac{\pi}{4} \right) \dots\dots\dots(16)$$

となって, Kelvin 波の表記^{(11),(12)}を得, 波高値が $\frac{1}{\sqrt{x}}$ で減衰する特性を示している. 式中の複号土については, (25)式により $\varpi''(\theta_1) > 0$, $\varpi''(\theta_2) < 0$ であるから, 上が $j=1$ (横波), 下が $j=2$ (縦波) に対応する.

3.2 Hogner 波としての解析

(11)式において, 前節と異なり $\varpi'''(\theta_j) = 0$ として,

$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{1}{6} \kappa_0 x |\varpi'''(\theta_j)|} (\theta - \theta_j) \dots\dots\dots(17)$$

のように置換し, 停留点回りの積分半長 ε のオーダーを $\varepsilon \sqrt[3]{\frac{1}{6} \kappa_0 x |\varpi'''(\theta_j)|} \rightarrow \infty$ となるように設定すれば, 第 2項の \sin 関数は, 奇関数となって消失す

るから、波高 ζ_f は、

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \frac{2\Psi(\theta_j)}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\kappa_0 x |\varpi'''(\theta_j)|}} \times \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_0^\infty \cos \varphi^3 d\varphi \dots\dots\dots(18)$$

によって求め得る。式中の積分項は、ガンマ関数を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \cos \varphi^3 d\varphi &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \\ \text{但し、} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) &\doteq 0.892979\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

のように確定できるから^{(10), (13)}、外縁近傍での自由波 ζ_f は、

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{6} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\sqrt[3]{\kappa_0 x |\varpi'''(\theta_j)|}} \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \dots(20)$$

のよって計算できる。(20)式は、以下に示す外縁直上での波高値を確定した Hogner の結果⁽⁶⁾を、その近傍まで適用できるように拡張したことになり、これを拡張 Hogner 波と呼ぶ。

Kelvin 波の外縁直上では、(8)式により、2 個の停留点は 1 点 θ_0 ($\equiv \theta_1 = \theta_2$) に重なって、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}} \quad (\text{i.e. } \Theta = \pm 19^\circ 28') \\ \tan \theta_0 &= -\frac{1}{4\beta} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sec \theta_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

となるから、(5),(6),(25)式の $\varpi, \varpi', \varpi'', \varpi''', \Psi$ の θ_0 での値として、

$$\left. \begin{aligned} \varpi(\theta_0) &= \frac{3}{8} \sqrt{6} \\ \varpi'(\theta_0) &= \varpi''(\theta_0) = 0 \\ \varpi'''(\theta_0) &= \pm \frac{9}{4} \sqrt{3} \\ \Psi(\theta_0) &= \frac{3\sqrt{6}}{16} \kappa_0 e^{-\frac{3}{2}\kappa_0 f} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

を得る。結果、外縁上での波高値 ζ_f は、(20)式により、

$$\zeta_f \Big|_{\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}} = \frac{9\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{4\sqrt[3]{3\sqrt{3}}} \cdot e^{-\frac{3}{2}\kappa_0 f} \sqrt[3]{\frac{\kappa_0^2}{x}} \cos\left(\frac{3\sqrt{6}}{8} \kappa_0 x\right) \dots\dots(23)$$

のように、陽に確定できる⁽¹²⁾。これが所謂 Hogner 波と称される結果であり、漸近特性として波高値が $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ で減衰することを示している。但し、この(23)式では、既に述べた通り、外縁近傍での波高特性を評価できない。

3.3 高次 Hogner 波の提案

前節(20)式の拡張 Hogner 波の解析により、高階微係数間の関係として $|\varpi''(\theta_j)| \ll |\varpi'''(\theta_j)|$ を満たす Kelvin 角の外縁上と極く近傍での波高値を、発散することなく有限に確定することはできるが、 $|\varpi''(\theta_j)|$ と $|\varpi'''(\theta_j)|$ が同程度のオーダーで存在する領域に対しては、(11)式の位相関数 $\Omega(\theta)$ において、その両者を共存させた解析が必要である。

本節では、Hogner 波の適用範囲の拡張を狙って、(11)式の ζ_f に対する積分を、前節の Hogner⁽⁶⁾の解析に倣って、(17)式と同じ置換をして行なうと、

$$\left. \begin{aligned} \zeta_f &= \sum_{j=1}^2 \frac{\Psi(\theta_j)}{\sqrt[3]{\frac{1}{6}\kappa_0 x |\varpi'''(\theta_j)|}} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{-\infty}^\infty \cos(\tau_2(\theta_j) \varphi^2 \pm \varphi^3) d\varphi \\ &-\sin(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{-\infty}^\infty \sin(\tau_2(\theta_j) \varphi^2 \pm \varphi^3) d\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots(24) \\ \text{但し、} \tau_2(\theta_j) &\equiv \frac{\sqrt{6}^2}{2} \sqrt[3]{\kappa_0 x} \frac{\varpi''(\theta_j)}{\sqrt[3]{|\varpi'''(\theta_j)|^2}} \end{aligned} \right\}$$

のように書くことができ、以下これを、高次 Hogner 波と呼ぶ。式中の複号 \pm は、上が $\varpi'''(\theta_j) > 0$ となる $\beta > 0$ の右舷 ($y > 0$) 側、下が $\varpi'''(\theta_j) < 0$ となる $\beta < 0$ の左舷 ($y < 0$) 側に対応する。ここに、式中の $\varpi''(\theta_j), \varpi'''(\theta_j)$ は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \varpi''(\theta_j) &= \pm \sec^3 \theta_j \sqrt{1-8\beta^2} \\ \varpi'''(\theta_j) &= \pm 4 \sec^3 \theta_j \tan \theta_j \sqrt{1-8\beta^2} + 4\beta \sec^5 \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

のように表記でき、この式中での複号 \pm は、(16)式と同様、 $\varpi''(\theta_j)$ の正負に依存し、上が横波 θ_1 、下が縦波 θ_2 に対応することに注意を要する。

(24)式の φ に関する無限区間積分は、(13)式や(18)式のように解析的に確定することはできず、数値計算に拠らざるを得ないから、その位相関数

$\Phi(\varphi) = \tau_2(\theta_j)\varphi^2 \pm \varphi^3$ を区分的に 1 次式近似する Fillon の積分法

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \Phi(\varphi) d\theta &\doteq \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j,1}}^{\varphi_{j,2}} \cos(a_j \varphi + b_j) d\varphi \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\sin \Phi_{j,2} - \sin \Phi_{j,1}}{a_j} d\varphi \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \Phi(\varphi) d\theta &\doteq \sum_{j=1}^n \int_{\varphi_{j,1}}^{\varphi_{j,2}} \sin(a_j \varphi + b_j) d\varphi \\ &= -\sum_{j=1}^n \frac{\cos \Phi_{j,2} - \cos \Phi_{j,1}}{a_j} d\varphi \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

但し, $\begin{cases} \Phi_{j,k} = a_j \varphi_{j,k} + b_j \\ a_j = \frac{\Phi_{j,2} - \Phi_{j,1}}{\varphi_{j,2} - \varphi_{j,1}} \end{cases}$

を適用することにより, 激しく振動する \sin, \cos の被積分関数に対しても, 計算精度を保証した.

3.4 Kelvin 波と高次 Hogner 波の接続解

図 2 は, $\kappa_0 = 1, f = 1, x = 8$ の場合の横切断波形 ζ_f である.

$y > 0$ (右側) の 5 本の波形について見てみると, 細実線が, (5)式を直接, 前報⁽⁵⁾の附録に示す Fillon

の方法に従って, 近似することなく数値積分した厳密解であり, Kelvin 角 $\left(y = \pm \frac{x}{\sqrt{8}}\right)$ の外側にも, 波が生成されている. 細破線は, (16)式の Kelvin 波であり, 外縁で発散しているものの, 予想以上に適用範囲が広い.

二点鎖線は, (23)式の Hogner 波であり, 外縁のみに有効な値を延長したものである. 一点鎖線は, 外縁近傍にまで拡張した(20)式の拡張 Hogner 波であり, 外縁から内側に進むと, Kelvin 波から離れていき, $y = 0$ の中心線では, 発散する.

太破線が, (24)式を数値積分した結果であり, 本論で提案する高次 Hogner 波である. 外縁では, 二点鎖線の Hogner 波と一点鎖線の拡張 Hogner 波と一致していることから, 数値積分が正しく行なわれていることが分かる. 更に, 外縁近傍では, Kelvin 波の発散傾向を是正する波形が得られている. しかし, 外縁から, ある程度内側に入ると, 波形が不合理な振動を呈することになり, 予想より適用範囲が狭いことが分かった.

上記の状況から, $y < 0$ (左側) に示す太実線が, 外縁近傍で有効な高次 Hogner 波 (太破線) と, 大

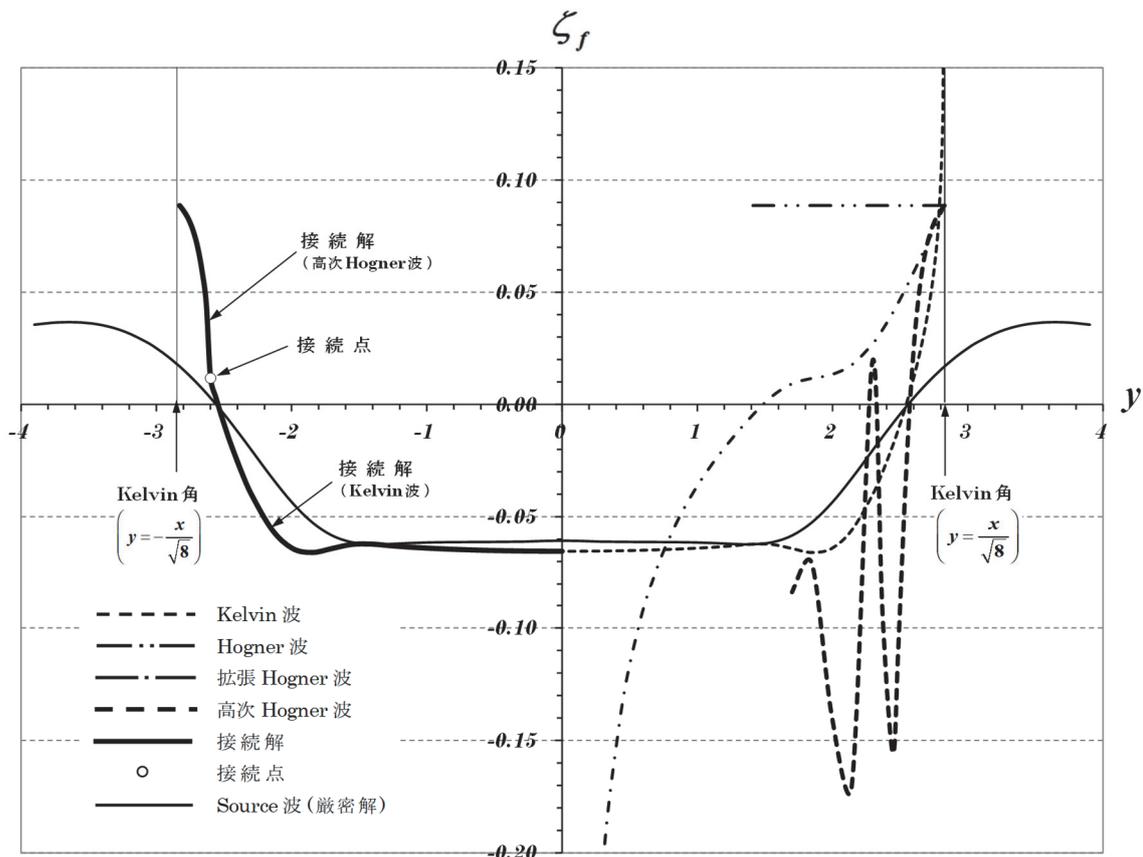


図 2 高次 Hogner 波と Kelvin 波の接続解 ($\kappa_0 = 1, f = 1, x = 8$)

部分の領域に対して有効な Kelvin 波(細破線)を、接続点(○のマーカー)で接続した結果であり、両者の数値的な接続解を得た。只、外縁での波高値は、厳密解(細実線)を、過大評価している。

図3は、 $\kappa_0=1, f=1$ の場合について、各横断面 x において、図2の太実線 ($y < 0$) に相当する、Kelvin 波と Hogner 波の数値的な接続解を求め、それを鳥瞰図に表わしたものである。図4は、接続前の Kelvin 波のみの鳥瞰図で、図2の横切断波形では、細破線の波形に相当する。

本論で提案する接続解を用いた図3では、図4に見られる Kelvin 角近傍での発散傾向が、明らかに改善されている様子が分かる。

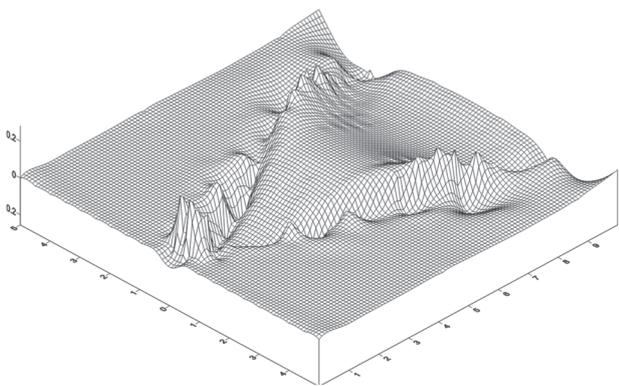


図3 接続解の波動場 ($\kappa_0=1, f=1$)

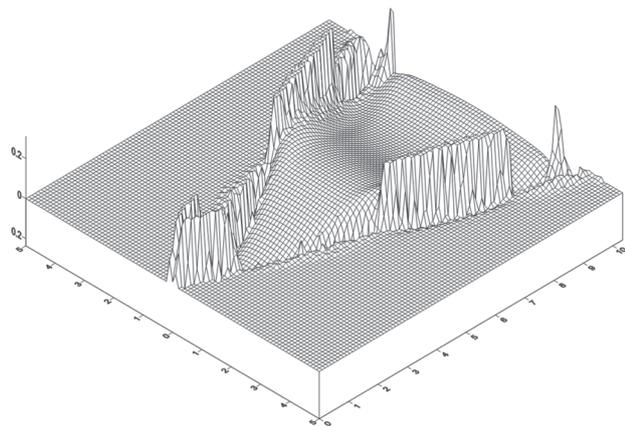


図4 Kelvin 波の波動場 ($\kappa_0=1, f=1$)

4. 結 論

本稿では、最も単純化した船の波として、一様流中に没水する点吹き出しが起こす後続自由波を対象に、停留位相法による解析を、推し進めた。

停留点回りの位相関数の展開形として、2階微係数で評価する Kelvin 波が外縁で発散する問題に対し、3階微係数のみで評価する Hogner の解析を更に一步進めて、位相関数の展開形として2階微係数と3階微係数を共存させた解析を試みることにより、数値積分によって、Kelvin 波の外縁近傍での発散傾向を是正する、高次 Hogner 波を提案した。只、その適用範囲は、外縁付近の狭い範囲に限られることも分かった。

本論で提案した高次 Hogner 波と、従来の Kelvin 波を、外縁近傍で接続し、数値的な意味での接続解を得た。

謝 辞

本研究は、室温超伝導理論の加藤 貴教授⁽¹⁴⁾(長崎総合科学大学 新技術創成研究所)のホームページでの言葉「2つの学説に矛盾が生じたとき、どちらかの説が間違いだと切り捨てるのではなく、どちらも生かそうとする努力をしてほしい!」を読んだことが契機になって、Kelvin 波と Hogner 波を接続してみようと考えた次第である。ここに記して、深甚なる感謝の意を表したい。

本稿を閉じるに臨み、長崎総合科学大学 船舶工学科の卒業研究(H28年度)と修士論文(H30年度)のテーマとして、著者と共に、本研究の数値計算の一部と HULINKS 社の地表マップ作成ソフト Surfer 13 を用いた計算結果の可視化に携わった、徐 海峰君(常石造船)に、篤くお礼申し上げます。

参考文献

- (1) Kelvin, Lord (Sir W. Thomson) : On the Waves Produced by a Single Impulse in Water of any Depth, or in a Dispersive Medium, Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A. Vol.42, pp.80 ~ 85, 1887.
- (2) Stoker, J.J. : Water Waves, Chap.8 Waves Caused by a Moving Pressure Point. Kelvin's Theory of the Wave Pattern created by a Moving Ship, Pure and Applied Mathematics Vol. IV, pp.219 ~ 243, 1957.

- (3) Newman, J.N. : Marine Hydrodynamics, Chap.6.10 Three-Dimensional Ship Waves, The MIT Press, pp.270 ~ 275, 1977.
- (4) 池畑 光尚: 船舶流体力学のための流体力学入門, 3.4.2 船の造る波, pp.76 ~ 78, 船舶技術協会, 1993 年 3 月.
- (5) 堀 勉: 停留位相法による船の波の計算, 日本航海学会誌 NAVIGATION, 第 190 号, pp.55 ~ 62, 2014 年 10 月.
- (6) Hogner, E : A Contribution to the Theory of Ship Waves, Arkiv för Matematik, Astronomi, och Fysik, Vol.17, 1922.
- (7) Keller, J.B. & Ahluwalia, D.S. : Wave Resistance and Wave Patterns of Thin Ships, Jour. Ship Research, Vol.20, No.1, pp.1 ~ 6, Mar. 1976.
- (8) 松村 清重, 井口 雄太: 定常移動する圧力源によって生成される自由波の Airy 関数表現について, 日本船舶海洋工学会 講演会論文集, 第 7K 号, No.2008K-G6-3, 2008 年 11 月.
- (9) 松村 清重, 杉森 心平, 井口 雄太: 後続自由波の Airy 関数表現と波形解析について, 日本船舶海洋工学会 講演会論文集, 第 10 号, No. 2010S-G3-5, 2010 年 6 月.
- (10) 森口 繁一, 宇田川 銈久, 一松 信: 岩波数学公式 I, § 56 Fourier 変換の型の定積分, pp.257, 1956 年 9 月.
- (11) 高木 又男: 造波理論, 大阪大学 大学院 造船学専攻 講義ノート, 1979 年.
- (12) 松村 清重: 線形造波抵抗理論ノート, 大阪大学 造船学科 田中研究室, 1983 年
- (13) 森口 繁一, 宇田川 銈久, 一松 信: 岩波数学公式 III, § 1 ガンマ函数, pp.5, 1960 年 3 月.
- (14) 加藤 貴: Love of Technology — NiAS 情熱の研究者と夢の探究者たち —, 長崎総合科学大学 ホームページ, <http://www.nias.jp/lovetech/#page/kato>, 2016 年 8 月.

附 録 高次 Kelvin 波への 拡張可能性の検討

本論の 3.3 節では, Hogner 波の適用範囲の拡張を狙って, (11)式の ζ_f に対する積分を, Hogner の

解析に倣って, (24)式のように 3 階微係数を基準にした置換を行なうことにより, 高次 Hogner 波を求め, Kelvin 波との数値的な接続解を定めた.

この附録では, Kelvin 波の拡張を図るため, Kelvin⁽¹⁾に倣って, 2 階微係数を基準にした置換を行ない, 位相関数の展開項数を 3 階, 4 階, 5 階, 6 階の高次まで, 順次増やした計算を実施し, Kelvin 波の高精度化の試みを行った結果を示す.

具体的には, (11)式の位相関数 $\Omega(\theta)$ の停留点 θ_j 回りに,

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) \equiv & \frac{1}{2!} \varpi''(\theta_j)(\theta - \theta_j)^2 + \frac{1}{3!} \varpi'''(\theta_j)(\theta - \theta_j)^3 \\ & + \frac{1}{4!} \varpi^{(4)}(\theta_j)(\theta - \theta_j)^4 + \frac{1}{5!} \varpi^{(5)}(\theta_j)(\theta - \theta_j)^5 \\ & + \frac{1}{6!} \varpi^{(6)}(\theta_j)(\theta - \theta_j)^6 \quad \dots\dots\dots(A-1) \end{aligned}$$

のように, 6 階の高次まで展開する. 実際, (12)式と同じ変換によって, 積分変数を θ から φ に置換することにより, 自由波 ζ_f は,

$$\begin{aligned} \zeta_f = & \sum_{j=1}^2 \frac{\Psi(\theta_j)}{\sqrt{\frac{1}{2} \kappa_0 x |\varpi''(\theta_j)|}} \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \cos(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \Phi(\varphi) d\varphi \\ & - \sin(\kappa_0 x \varpi(\theta_j)) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \Phi(\varphi) d\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots(A-2) \end{aligned}$$

のように書くことができる. 被積分関数中の位相関数 $\Phi(\varphi) \equiv \kappa_0 x \Omega(\theta)$ の φ に関する展開形を,

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \pm \varphi^2 + \sigma_3(\theta_j) \varphi^3 + \sigma_4(\theta_j) \varphi^4 \\ & + \sigma_5(\theta_j) \varphi^5 + \sigma_6(\theta_j) \varphi^6 \quad \dots\dots(A-3) \end{aligned}$$

のように表記すれば, 各項の係数 $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ はそれぞれ,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3(\theta_j) & \equiv \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\kappa_0 x}} \cdot \frac{\varpi'''(\theta_j)}{\sqrt{|\varpi''(\theta_j)|^3}} \\ \sigma_4(\theta_j) & \equiv \frac{1}{6\kappa_0 x} \cdot \frac{\varpi^{(4)}(\theta_j)}{|\varpi''(\theta_j)|^2} \\ \sigma_5(\theta_j) & \equiv \frac{\sqrt{2}}{30\sqrt{\kappa_0 x^3}} \cdot \frac{\varpi^{(5)}(\theta_j)}{\sqrt{|\varpi''(\theta_j)|^5}} \\ \sigma_6(\theta_j) & \equiv \frac{1}{90(\kappa_0 x)^2} \cdot \frac{\varpi^{(6)}(\theta_j)}{|\varpi''(\theta_j)|^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(A-4)$$

のように書くことができる. 上式中の

$\varpi''(\theta_j), \varpi'''(\theta_j)$ は, (25)式に記す通りなので, 高階微係数 $\varpi^{(4)}(\theta_j), \varpi^{(5)}(\theta_j), \varpi^{(6)}(\theta_j)$ について計算した結果,

$$\left. \begin{aligned} \varpi^{(4)}(\theta_j) &= \pm \sec^3 \theta_j (5 + 18 \tan^2 \theta_j) \sqrt{1 - 8\beta^2} \\ &\quad + 36\beta \sec^5 \theta_j \tan \theta_j \\ \varpi^{(5)}(\theta_j) &= \pm 8 \sec^3 \theta_j \tan \theta_j (7 + 12 \tan^2 \theta_j) \sqrt{1 - 8\beta^2} \\ &\quad + 8\beta \sec^5 \theta_j (7 + 36 \tan^2 \theta_j) \\ \varpi^{(6)}(\theta_j) &= \pm \sec^3 \theta_j \left(\begin{aligned} &61 + 540 \tan^2 \theta_j \\ &+ 600 \tan^4 \theta_j \end{aligned} \right) \sqrt{1 - 8\beta^2} \\ &\quad + 120\beta \sec^5 \theta_j \tan \theta_j (9 + 20 \tan^2 \theta_j) \end{aligned} \right\} \dots (A-5)$$

のように求め得た. ここに, (A-3), (A-5) 両式中の複号±は, (25)式と同様, $\varpi''(\theta_j)$ の正負に依存し, 上が横波 θ_1 , 下が縦波 θ_2 に対応する.

(A-2)式の積分は, 3.3節(24)式の場合と同様, (26)式の Fillon の積分公式を用いて, 数値的に積分を実施する.

図 A-1 に, $\kappa_0 = 5, f = 1, x = 7$ に対して計算した,

横切断波形 ζ_f の結果を示す.

太実線が, 図2の細実線と同様, (5)式を近似することなく数値積分した, 線形造波理論での Source 波の厳密解である. Kelvin 角の外縁 $\left(y = \pm \frac{x}{\sqrt{8}}\right)$ 近傍で発散している太破線が, (16)式に示すように, 2階微係数のみで計算した, 所謂 Kelvin 波である. 外縁の近傍以外では, 両者の一致度は極めて良好であり, 解析解として得られている Kelvin 波の近似度の高さを, 改めて再認識させられる.

一点鎖線は, 3階微係数のみで計算した, (20)式の拡張 Hogner 波であり, 外縁の波高値を有限に確定しているものの, 中心線 ($y = 0$) に向かって, 発散傾向にあり, 波形の全体像は, 到底捉えきれない状況は, 図2にも示した通りである.

以下, 細実線と細破線が, Kelvin 波の拡張可能性について, この附録での提案を検討した結果であり, $y > 0$ 側と $y < 0$ 側に, それぞれ分けて示す.

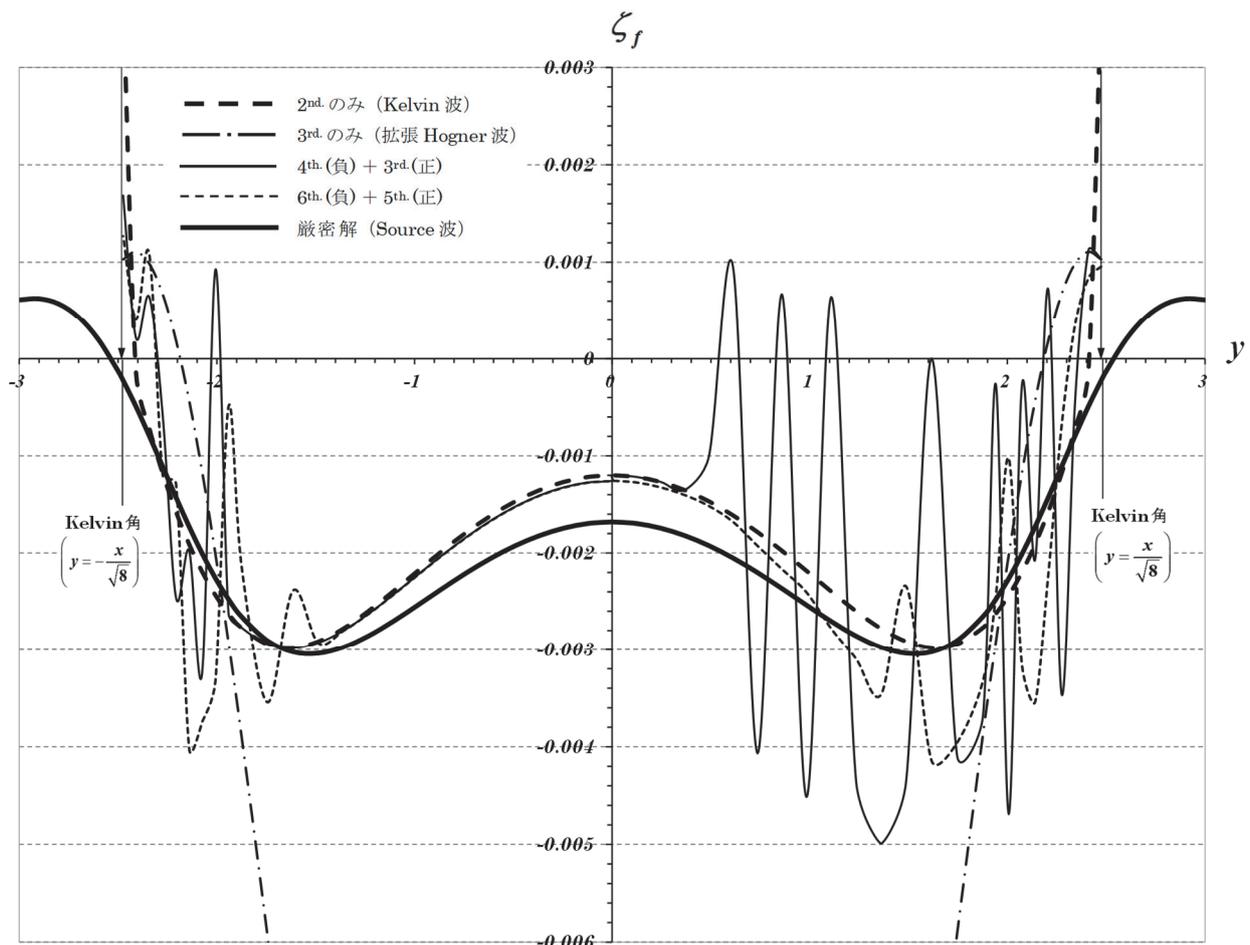


図 A-1 高次 Kelvin 波への拡張可能性の検討 ($\kappa_0 = 5, f = 1, x = 7$)

$y > 0$ 側の細実線 (3rd(正)) は, (A-3)式の σ_3 迄を考慮 ($\sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$) した結果である. これは, 3.3 節の(24)式で提案し, 図 2 に太破線で示す高次 Hogner 波と, 積分変数の置換は異なるが, 計算した波高値は同値である. 波形は, 中心線付近では太破線の Kelvin 波に, 外縁近傍では一点鎖線の拡張 Hogner 波に一致するが, その中間の大部分の領域では, 波高値が激しく変動し, 全域に互る Kelvin 波の拡張には至っていない.

また, $y < 0$ 側の細実線 (4th(負)) は, 展開の近似項数を増して, σ_4 まで考慮 ($\sigma_5 = \sigma_6 = 0$) した計算であり, Kelvin 波と一致する中心線からの領域は可也り広がったものの, 外縁付近では 3rd(正) ($y > 0$ 側の細実線) と同様に波形が振動し, 外縁での有限値も, 一点鎖線の拡張 Hogner 波より少し高めに得られている.

続く, $y > 0$ 側の細破線 (5th(正)) は, $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ を考慮 ($\sigma_6 = 0$) した結果である. 細実線の 3rd(正) よりも, 不合理な波形の振動振幅は, 小さく抑えられており, 外縁での有限値も, 4rd(負) ($y < 0$ 側の細実線) より改善されて, 一点鎖線の拡張

Hogner 波に一致している.

更に, $y < 0$ 側の細破線 (6th(負)) は, $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ 全てを考慮した計算結果であるが, 5th(正) ($y > 0$ 側の細破線) と, 波形の変動は, さほど変わらず, 外縁での有限値も, 4rd(負) ($y < 0$ 側の細実線) よりは低めであるが, やはり一点鎖線の拡張 Hogner 波より, 少し高めに得られている.

結果, σ_3, σ_5 の φ に関する奇数乗の項まで考慮して計算した場合は, 外縁での ζ_f の有限値は, 拡張 Hogner 波に一致して得られるが, σ_4, σ_6 のように, φ の偶数乗の項まで計算すると, 外縁での有限値は, 拡張 Hogner 波と少し異なった値を取る傾向にあることが分かった.

以上, (A-3)式に示すように, 位相関数の展開項数を 3 階, 4 階, 5 階, 6 階の高次まで, 順次増やして, ζ_f に対する(A-2)式の数値積分を試みたものの, どの場合も, 中心線と外縁の中間領域に不合理な振動波形を生じる結果となり, このような高次化によっては, 全域に互る Kelvin 波の拡張解を得るには, 至らなかった.

令和 2 年 1 月 22 日投稿



ホリ
堀 ツトム
勉

正会員 長崎総合科学大学 工学部 船舶工学コース 教授 (☎851-0193 長崎市網場町 536)
E-mail : HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp, HomePage : <http://www.ship.nias.ac.jp/personnel/horiken/>
1987 年 大阪大学 大学院 工学研究科 造船学専攻 博士後期課程 修了, 工学博士
所属学会 : 日本航海学会, 日本船舶海洋工学会の各会員 ; 研究テーマ : 水面波動力学

巻頭言

運航者（航海士）と日本航海学会の関わり / *The relation between Navigator and Japan Institute of Navigation* 乾 真 / Makoto INUI ... (1)

特集

海洋工学研究会の50年 / *Fifty Years of the Study Group for Ocean Engineering* 南 清和 / Kiyokazu MAINMI ... (2)

海洋工学研究会における地域シンポジウム開催の試み / *Trial to Hold the Regional Symposium at Marine Technology Society, Japan Institute of Navigation*

..... 行平 真也 / Masaya YUKIHIRA ... (6)

走錨事故防止のための研究について / *About the Studies for the Prevention of the Anchor Dragging Accident* 増田 光弘 / Mitsuhiro MASUDA ... (11)

練習船による海洋観測の海洋工学・技術者教育への貢献 / *The Contributions for the Fields of Ocean and Educating Engineering by Oceanographic Observations by Training Ships.*

..... 千葉 元・森井 康宏・山脇 信博・畠 俊郎・道田 豊・金山 恵美・古山 彰一・福留 研一・清田 耕司・藪上 敦弘・岸 拓真

..... / Hajime CHIBA, Yasuhiro MORII, Nobuhiro YAMAWAKI, Toshiro HATA, Yutaka MICHIDA, Emi KANAYAMA, Shoichi FURUYAMA, Kenichi FUKUDOME,

Kouji SEIDA, Atsuhiro YABUGAMI and Takuma KISHI (18)

海上輸送と海洋環境にかかるマリンハザード研究 / *Research of Marine Hazards on Marine Transportation and Environment*

..... 林 美鶴・中田 聡史・橋本 博公 / Mitsuru HAYASHI, Satoshi NAKADA and Hirotada HASHIMOTO ... (24)

教育・研究機関紹介

広島商船高等専門学校 / *National Institute of technology, Hiroshima* (35)

事業所紹介

BEMAC 株式会社 東京データラボの紹介 / *Introduction of TOKYO Data Labo in BEMAC Corporation* 村上 誠 / Makoto MURAKAMI ... (41)

海事博物館紹介

日本郵船歴史博物館の紹介 / *Introduction of NYK Maritime Museum* 堀江 誠 / Makoto HORIE ... (47)

研究室紹介

富山高専専門学校 金山研究室 / *National Institute of Technology, Toyama College. KANAYAMA's Laboratory* 金山 恵美 / Emi KANAYAMA ... (55)

解説・展望

灯台の経緯度と水路局長柳樹悦 / *Longitudes and Latitudes of Lighthouses and Chief Hydrographer, YANAGI Narayoshi* 佐藤 敏 / SATO Satoshi ... (60)

研究・調査

停留位相法による船の波の計算 — その2: Kelvin 波と Hogner 波の接続解 —

..... / *Calculation of Ship Waves by means of Stationary Phase Method -Part 2: Connection between Kelvin Wave and Hogner Wave-* 堀 勉 / Tsutomu HORI ... (65)

小笠原における一部戦没船の船名調査 / *Research into the Ships' Names of Several Wrecks of the Pacific War in Ogasawara*

..... 笠井 信利・種市 雅彦 / Nobutoshi KASAI and Masahiko TANEICHI ... (74)

報告

日本航海学会講演会アンケート結果の概要 / *Summary of Questionnaire Results at Conference of JIN*

..... 山田 多津人・福田 巖 / Tatsuto YAMADA and Gen FUKUDA ... (84)

日本航海学会論文集 Vol. 141 (2019) 目次 (90)

事務局だより (92)

投稿要領 (93)