

日本航海学会誌

NAVIGATION

21世紀の新しい針路を求めて

停留位相法による船の波の計算

堀 勉

*Calculation of Ship Waves
by means of Stationary Phase Method*

Tsutomu HORI

平成26年

10月

第190号



研究・調査

停留位相法による船の波の計算

堀 勉

Calculation of Ship Waves by means of Stationary Phase Method

Tsutomu HORI

キーワード: 船の波、停留位相法、波紋図、鳥瞰図、ケルビン波

1. はじめに

船の起こす波として、Lord Kelvin による停留位相法による解析は余りにも有名で、現在では Kelvin 波と称される船舶流体力学の古典⁽¹⁾と云った感であるが、その結果は、後方へ伝播する横波成分と、八の字状に拡がる縦波成分を表す波頂線図（例えば、本稿 図3の上面）として描かれることが殆どで、具体的に停留位相法を用いて波高値そのものを計算し、等高線図として表現した波紋図や、3次元的な鳥瞰図として描かれた例は少ないように思われる。

このような状況に鑑み、本稿で船の起こす波として、単一の吹き出し (Point Source) が一定速度で直進するとき起こす波 (Kelvin 波) の波高値を停留位相法を用いて計算し、その結果を、横波や縦波それぞれの成分毎に波紋図や鳥瞰図として描画することも、あながち無意味ではないと考え、報告する次第である。

2. Point Source による波

図1に示すような、 o - xyz 座標系で、一様流 U の中に、強さ M の Point Source が原点直下、没水深度 f の位置 $(0, 0, -f)$ に置かれたときの速度ポテンシャル Φ を、

$$\Phi(x, y, z) = Ux - MG(x, y, z) \cdots \cdots (1)$$

の形で構成する。式中の G は、

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r_1} + G'(x, y, z) \left. \vphantom{G(x, y, z)} \right\} \cdots \cdots (2)$$

$$\text{但し, } r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+f)^2}$$

のように書くことができ、水面条件を満たす単位強さの吸込みの攪乱速度ポテンシャルに相当する造波グリーン関数である。この G の第1項に対し、

$$\frac{1}{r_1} = \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k(z+f) + ik\varpi} d\theta \right] \left. \vphantom{\frac{1}{r_1}} \right\} \cdots (3)$$

$$\text{但し, } \varpi = x \cos \theta + y \sin \theta$$

のように Bessel 関数の積分表記を用い、第2項の G' に対しても、流場の連続条件

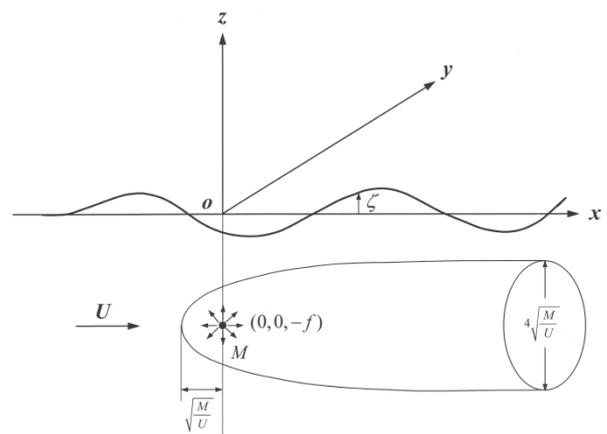


図1 Point Source と座標系

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G'(x, y, z) = 0 \quad \dots\dots(4)$$

と、水底の条件

$$\left.\frac{\partial G'}{\partial z}\right|_{z=-\infty} = 0 \quad \dots\dots(5)$$

を満足するように、同様な Fourier 積分形

$$G'(x, y, z) = \text{Re} \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} F(k, \theta) e^{kz + ik\varpi} dk \right] \quad (6)$$

を仮定する。両項を加えた(2)式の G に対して、生成波の放射条件を満たす為の Rayleigh の仮想摩擦係数 μ' を導入し、波数を K_0 とするとき、線型自由表面条件

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + K_0 \frac{\partial G}{\partial z} + \mu' \frac{\partial G}{\partial x} &= 0 \quad (\text{on } z=0) \\ \text{但し, } K_0 &= \frac{g}{U^2} \end{aligned} \right\} \dots(7)$$

を満足するように未定関数 $F(k, \theta)$ を決めると、

$$F(k, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \times \left\{ 1 + \frac{2K_0 \sec^2 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta - i\mu' \sec \theta} \right\} e^{-kf} \dots(8)$$

となる。これを (6)式に代入すれば、 G' は

$$\left. \begin{aligned} G'(x, y, z) &= -\frac{1}{r_2} - \text{Re} \left[\frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right. \\ &\times \left. \int_0^{\infty} \frac{e^{-kf} \sec^2 \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta - i\mu' \sec \theta} e^{kz + ik\varpi} dk \right] \\ \text{但し, } r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-f)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と書けるから、 G は

$$G(x, y, z) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \text{Re} \left[\frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 \theta d\theta \times \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z-f) + ik\varpi}}{k - K_0 \sec^2 \theta - i\mu' \sec \theta} dk \right] \dots(10)$$

と決定される。

これを用いて、強さ M の Point Source が生成する波高 ζ は、Bernoulli の定理により、

$$\zeta = \frac{M}{K_0 U} \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} \dots\dots\dots(11)$$

によって計算できる。第1, 第2項は相殺して、

$$\zeta = \text{Re} \left[-i \frac{M}{\pi U} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \times \int_0^{\infty} \frac{k \sec \theta}{k - K_0 \sec^2 \theta - i\mu' \sec \theta} e^{-kf + ik\varpi} dk \right] \quad (12)$$

として求まるが、被積分関数の θ に関する周期性を検討すると、その実部を採った場合、周期は π であるから、その積分区間を半分に戻し、 $\varpi > 0$ の区間に限定できて、

$$\zeta = \text{Re} \left[-i \frac{2M}{\pi U} \int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \sec \theta d\theta \times \int_0^{\infty} \frac{k e^{-kf + ik\varpi}}{k - (K_0 \sec^2 \theta + i\mu' \sec \theta)} dk \right] \dots(13)$$

のように書き表せる。式中の ϖ は、(3)式に記したものであるが、

$$\left. \begin{aligned} \varpi &= r \cos(\theta - \alpha) \\ \text{但し, } \left\{ \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

とも書くことができ、水波の物理的には、 θ は素成波の伝播方向を、 ϖ はその伝播方向の進行距離を示し、 α は波高の計算点 (x, y) の偏角である。

ここに、 k に関する積分を、複素平面 $w = k + im$ 上の第1象限での周回積分で評価すると、 $\varpi > 0$ に対しては、無限遠での積分値は消失するから、実軸上の k に関する積分を、虚軸上 m の積分に移し替えることができる。ここに、 $\mu' \rightarrow +0$ だから、 $\sec \theta > 0$ の区間のみから留数が生じることから、

$$\zeta = \frac{2M}{\pi U} \text{Re} \left[\int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{m e^{-m\varpi - imf}}{m + iK_0 \sec^2 \theta} dm + 2\pi K_0 \int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} e^{-K_0(f-i\varpi)\sec^2 \theta} \sec^3 \theta d\theta \right] \dots(15)$$

となる。第1項の m に関する積分を変形することにより、

$$\zeta = -\frac{2M}{\pi U} \text{Re} \left[i \left\{ \int_{\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2} + \alpha} \frac{\sec \theta}{f - i\varpi} + K_0 \sec^3 \theta e^{-K_0(f-i\varpi)\sec^2 \theta} \text{Ei}(-K_0(f-i\varpi)\sec^2 \theta) \right\} d\theta \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4MK_0}{U} \operatorname{Re} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} e^{-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta} \sec^3\theta d\theta \right] \\
 & \equiv \zeta_\ell + \zeta_f \dots\dots\dots(16)
 \end{aligned}$$

のように、複素数域の積分指数関数 Ei に帰着させることができ、それを含む第1項が局部攪乱波 ζ_ℓ を、第2項が後続自由波 ζ_f を表す。式中第1項の積分指数関数 Ei は、

$$\begin{aligned}
 Ei(-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta) &= \int_{-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw \\
 &= -\gamma - \log_e(-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta) \\
 &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta)^n}{n \cdot n!} \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

のように Taylor 展開で計算できるから、

$$\begin{aligned}
 Ei(-K_0(f-i\varpi)\sec^2\theta) &= -\gamma - \log_e \rho - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n \cdot n!} \cos n(\phi + \pi) \\
 &\quad + i \left\{ -\phi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n \cdot n!} \sin n(\phi + \pi) \right\} \\
 &\equiv E_c + i E_s \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

$$\text{但し, } \begin{cases} \rho = K_0 \sqrt{f^2 + \varpi^2} \sec^2 \theta \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\varpi}{-f} \right) \\ \gamma = 0.57721 \dots \text{ (Euler定数)} \end{cases} \dots\dots(19)$$

のように、実部 E_c と虚部 E_s に分離して書いたものである。この表記では、 $\varpi > 0$ であるから、偏角 ϕ は、複素平面上の常に第2象限に位置することになるが、 Ei の数値計算に当っては、

$$\left. \begin{aligned} \rho \leq 30, \text{ 且つ, } K_0 \varpi \sec^2 \theta \leq 15 &: \text{ Taylor 展開} \\ \rho \leq 30, \text{ 且つ, } K_0 \varpi \sec^2 \theta > 15 &: \text{ 連分数展開} \\ \rho > 30 &: \text{ 漸近展開} \end{aligned} \right\} (20)$$

のように、 ρ が大きな領域では、(18)式の Taylor 展開に加えて、連分数展開と漸近展開を併用して計算することになるが、本稿の目的は、後続

自由波 ζ_f の計算にあり、 Ei は局部攪乱波 ζ_ℓ の計算に必要なものであるから、その詳細には触れないで置く。

実際、(16)式の実部を採ることにより、Point Source の波は、

$$\begin{aligned}
 \zeta_\ell + \zeta_f &= \frac{2M}{\pi U} \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varpi \sec \theta}{f^2 + \varpi^2} + K_0 \sec^3 \theta e^{-K_0 f \sec^2 \theta} \right. \\
 &\times \left. \left\{ E_c \sin(K_0 \varpi \sec^2 \theta) + E_s \cos(K_0 \varpi \sec^2 \theta) \right\} \right] d\theta \\
 &+ \frac{4MK_0}{U} \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} e^{-K_0 f \sec^2 \theta} \cos(K_0 \varpi \sec^2 \theta) \sec^3 \theta d\theta \dots\dots\dots(21)
 \end{aligned}$$

のように書き表すことができる。

3. 停留位相法による波

(21)式第2項の後続自由波 ζ_f は、

$$\zeta_f = \int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \Psi(\theta) \cos \left\{ K_0 r \widehat{\varpi}(\theta) \right\} d\theta \left. \begin{aligned} &\Psi(\theta) = \frac{4MK_0}{U} e^{-K_0 f \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \dots\dots(22) \\ &\text{但し, } \widehat{\varpi}(\theta) = \cos(\theta - \alpha) \sec^2 \theta \\ &\quad = \frac{\varpi}{r} \sec^2 \theta \end{aligned} \right\}$$

のように、振幅に相当する Ψ と位相関数 $\widehat{\varpi}$ を用いて書くことができる。 $\widehat{\varpi}'(\theta) = 0$ なる停留点は、

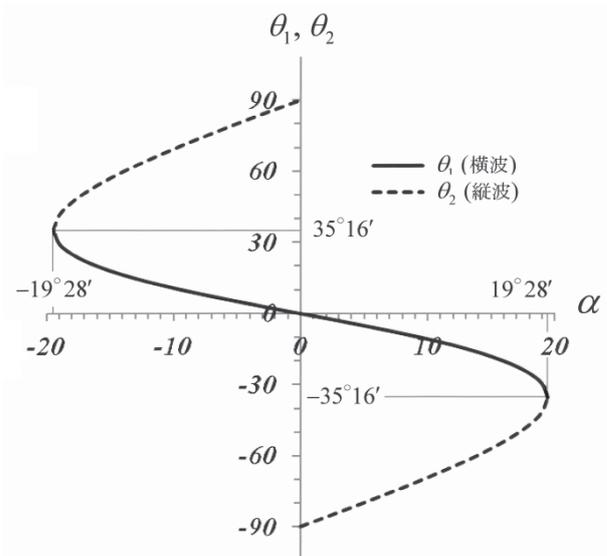


図2 偏角 α と停留点 θ の関係

$$2 \tan \theta - \tan(\theta - \alpha) = 0 \dots\dots\dots(23)$$

を満たす θ を求めれば、

$$\tan \theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8 \tan^2 \alpha}}{4 \tan \alpha} \dots\dots\dots(24)$$

となり、偏角 α に対して θ は 2 点存在し、 $|\theta_1| < |\theta_2|$ の関係にあるから、複号土の上が θ_1 の横波成分、下が θ_2 の縦波成分の伝播方向である。

停留点 θ_j ($j=1,2$) は、(24)式分子の根号内为正である

$$\left. \begin{aligned} |\tan \alpha| &\leq \frac{1}{\sqrt{8}} \\ |\alpha| &\leq 19^\circ 28' \text{ (Kelvin 角)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

の範囲内にのみ存在するから、波もこの Kelvin 角の範囲内にのみ生成されることになる。また、図 2 に示すように、 α と 2 点の θ_j とは正負逆符号として得られることから、右舷側 ($\alpha > 0$) の波は、左舷方向 ($\theta_j < 0$) に伝播する素成波によって生成されることが分かる。

(22)式の積分区間を、停留点 θ_j の近傍とそれ以外に分けると、 $\alpha > 0$ に対しては、 $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \theta_1 < 0$ であるから、

$$\zeta_f = \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\theta_2} + \int_{\theta_2 - \varepsilon}^{\theta_2 + \varepsilon} + \int_{\theta_2 + \varepsilon}^{\theta_1 - \varepsilon} + \int_{\theta_1 - \varepsilon}^{\theta_1 + \varepsilon} + \int_{\theta_1 + \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \right\} \Psi(\theta) \cos \{ K_0 r \widehat{\omega}(\theta) \} d\theta \dots\dots(26)$$

となり、 $K_0 r \gg 1$ では、第 1, 第 3, 第 5 区間は激しく変動して積分値に寄与しなくなり、第 2, 第 4 区間のみで波高値が決定されることになる。この $\widehat{\omega}'(\theta_j) = 0$ の停留点回りでは、位相関数 $\widehat{\omega}(\theta)$ は、

$$\widehat{\omega}(\theta) = \widehat{\omega}(\theta_j) + \frac{1}{2} \widehat{\omega}''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^2 \dots\dots(27)$$

のように展開できるから、波高値 ζ_f は近似的に、

$$\zeta_f \doteq \sum_{j=1}^2 \int_{\theta_j - \varepsilon}^{\theta_j + \varepsilon} \Psi(\theta_j) \times \cos \left[K_0 r \left\{ \widehat{\omega}(\theta_j) \pm \frac{1}{2} \widehat{\omega}''(\theta_j) (\theta - \theta_j)^2 \right\} \right] d\theta \quad (28)$$

によって、解析的に計算できる。複号の土は、上が $\widehat{\omega}''(\theta_j) > 0$ 、下が $\widehat{\omega}''(\theta_j) < 0$ であり、後の(34),(35)式の結果から検討すると、 $\widehat{\omega}''(\theta_1) > 0$ 、 $\widehat{\omega}''(\theta_2) < 0$ であるから、(24)式と同様、複号の上が $j=1$ (横波)、下が $j=2$ (縦波) に対応することになる。(28)式において、

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|} (\theta - \theta_j) \dots\dots\dots(29)$$

と置いて、積分変数を θ から φ に変換すると、

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \frac{\Psi(\theta_j)}{\sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|}} \times \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|}} \cos \left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \pm \varphi^2 \right) d\varphi \dots\dots(30)$$

と書けるから、 $\varepsilon \sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|} \rightarrow \infty$ となるように $\varepsilon (\ll 1)$ を設定すれば、

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \frac{\Psi(\theta_j)}{\sqrt{\frac{1}{2} K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|}} \left\{ \cos \left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \cos \varphi^2 d\varphi \mp \sin \left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \right) \int_{-\infty}^{\infty} \sin \varphi^2 d\varphi \right\} \quad (31)$$

となる。式中の無限区間の積分は Fresnel 積分に帰着されて、両者とも $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ であるから、

$$\zeta_f = \sum_{j=1}^2 \Psi(\theta_j) \sqrt{\frac{\pi}{K_0 r \left| \widehat{\omega}''(\theta_j) \right|}} \times \left\{ \cos \left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \right) \mp \sin \left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \right) \right\} \dots\dots(32)$$

となる。 $j=1,2$ に対して、2 項を合成して余弦で書くと、

$$\zeta_f = \Psi(\theta_1) \sqrt{\frac{2\pi}{K_0 r |\widehat{\omega}''(\theta_1)|}} \cos\left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_1) + \frac{\pi}{4}\right) + \Psi(\theta_2) \sqrt{\frac{2\pi}{K_0 r |\widehat{\omega}''(\theta_2)|}} \cos\left(K_0 r \widehat{\omega}(\theta_2) - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \zeta_1(\text{横波}) + \zeta_2(\text{縦波}) \dots\dots\dots(33)$$

のような Kelvin 波の表記を得、横波と縦波の重量で計算できる。

ここで、 $\Psi(\theta_j), \widehat{\omega}(\theta_j), \widehat{\omega}''(\theta_j)$ それぞれについて、 α に関する陽な表現式を作ると、

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\theta_j) &= \frac{\sqrt{1+4\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}^3}{16\sqrt{2}\tau^3} e^{-K_0 f \frac{1+4\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}{8\tau^2}} \\ \widehat{\omega}(\theta_j) &= \frac{1+4\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}{4\sqrt{2}\tau\sqrt{1-2\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}} \\ \widehat{\omega}''(\theta_j) &= \frac{-1+6\tau^2+16\tau^4 \pm (1-2\tau^2)\sqrt{1-8\tau^2}}{4\sqrt{2}\tau^3\sqrt{1-2\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}} \end{aligned} \right\} (34)$$

但し、 $\tau = \tan \alpha$

を得、 $\alpha \rightarrow 0$ (即ち、 $\tau \rightarrow 0$) に対する漸近挙動を調査すると、

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\theta_1) = e^{-K_0 f}, \Psi(\theta_2) = \frac{1}{8\tau^3} e^{-\frac{K_0 f}{4\tau^2}} \rightarrow 0 \\ \widehat{\omega}(\theta_1) = 1, \widehat{\omega}(\theta_2) = \frac{1}{4\tau} \rightarrow \infty \\ \widehat{\omega}''(\theta_1) = 1, \widehat{\omega}''(\theta_2) = -\frac{1}{8\tau^3} \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

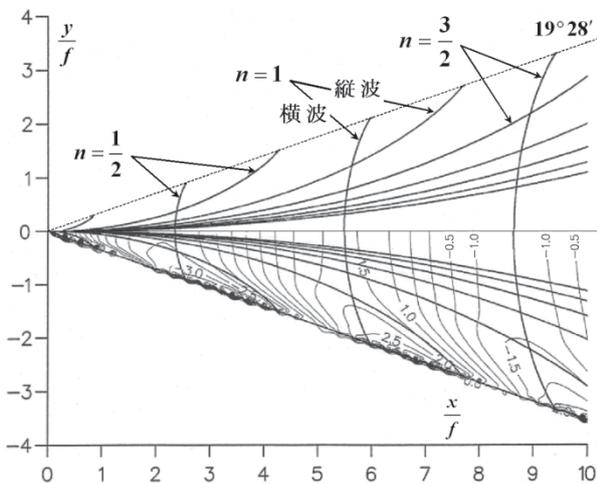


図3 Kelvin 波の波頂線

となる。これらを用いれば、 θ_j を介することなく、計算座標 (r, α) に対して、ダイレクトに Kelvin 波の波高を計算できる。

3.1 波頂線図

波頂線は、自由波 ζ_f の横波、縦波それぞれの方に伝播する素成波の山谷を繋ぐことによって描ける。停留位相法によって得られた(33)式の位相関数に対して、

$$\left. \begin{aligned} K_0 r \widehat{\omega}(\theta_j) \pm \frac{\pi}{4} = 2n\pi \\ \text{但し、} n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

なる条件から、 $\widehat{\omega}(\theta_j)$ に(34)式の表記を使って、 r について解き、没水深度 f で無次元化すれば、

$$\frac{r_j}{f} = \frac{\left(2n \mp \frac{1}{4}\right)\pi}{K_0 f} \cdot \frac{4\sqrt{2}\tau\sqrt{1-2\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}}}{1+4\tau^2 \mp \sqrt{1-8\tau^2}} \dots(37)$$

となり、 $j=1, 2$ に対応する。式中の $K_0 f$ は、

$$\left. \begin{aligned} K_0 f = \frac{1}{Fn^2} \\ \text{但し、} Fn = \frac{U}{\sqrt{gf}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

のように、没水深度を規準長とする Froude 数の自乗の逆数である。

$K_0 f = 1$ の場合について、偏角 α に対して r_1, r_2 を計算し、横波成分 ζ_1 と縦波成分 ζ_2 それぞれの波頂線を図3に描く。横軸 $\frac{x}{f}$ 、縦軸 $\frac{y}{f}$ は、共に没水深度 f で無次元化した座標であり、下面には、参考の為に図5に示す停留位相法による波高値の等高線を重ね描きしておいた。横波の波頂線が、等高線の山谷を良く捉えている様子が分かる。

3.2 波紋図と鳥観図

(33)式の自由波 ζ_f に、(34)式の $\Psi(\theta_j)$ と $\widehat{\omega}(\theta_j)$ を用いることにより、波数 K_0 と計算点

(x, y) から定まる(14)式の r と $\tau = \tan \alpha$ を与えて、横波 ζ_1 と縦波 ζ_2 の波高値を計算し、それらを重畳して Kelvin 波の波高 ζ_f を求める。

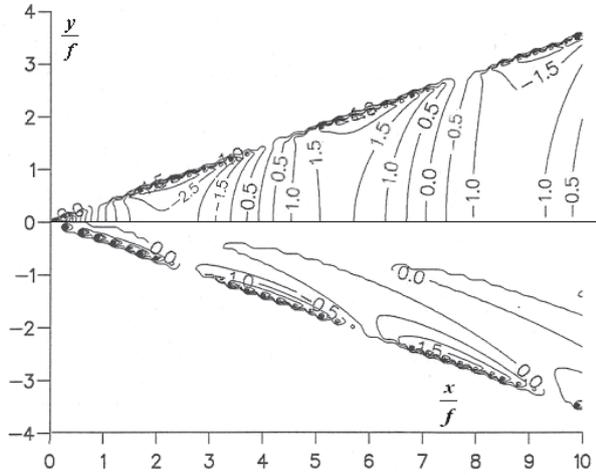


図4 横波(上)と縦波(下)の波紋図

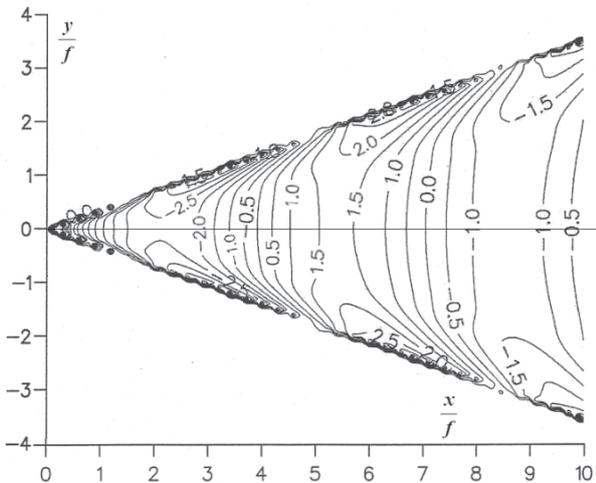


図5 Kelvin 波の波紋図

図4は、図3と同じ $K_0 f = 1$ の場合について、 $\frac{M}{Uf}$ で無次元化した波高値 $\frac{\zeta_f}{\left(\frac{M}{Uf}\right)}$ を等高線図に

表したもので、右舷側(上面)に横波成分、左舷側(下面)に縦波成分を描いている。その両者を重畳して描いた Kelvin 波の波紋図を、図5に示す。

それらを鳥瞰図に表した結果を、図6, 7, 8に示す。図6が横波、図7が縦波、図8が重畳した Kelvin 波である。

ともに Kelvin 角の範囲内だけに、波が生成されている様子が良く分かる。波紋図では横波成分が支配的に見えるが、鳥瞰図では八の字状の縦波成分が顕著に現れている。但し、Kelvin 角の近傍では $\hat{\omega}''(\theta_j) = 0$ となって(27)式の展開の仮定が崩れ、(33)式の波高値が発散するので、Hogner の解析を用いる必要があるから、この近傍での波の様子の詳細な議論は差し控える。

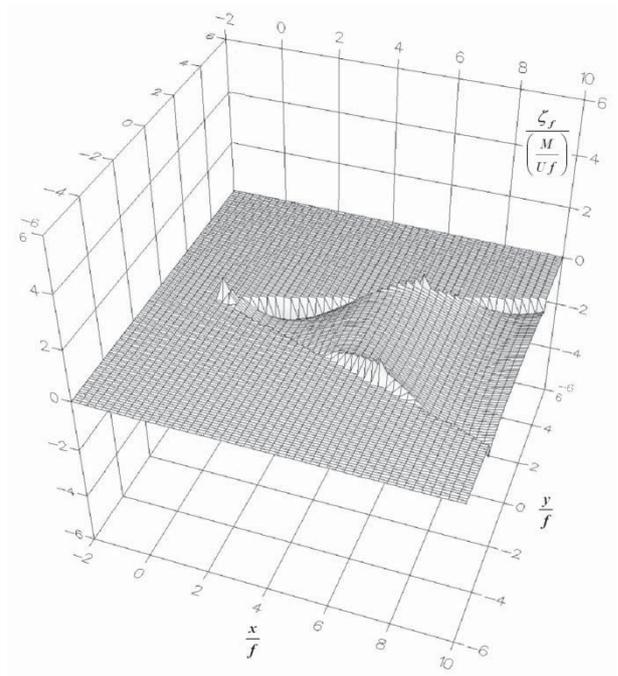


図6 横波の鳥瞰図

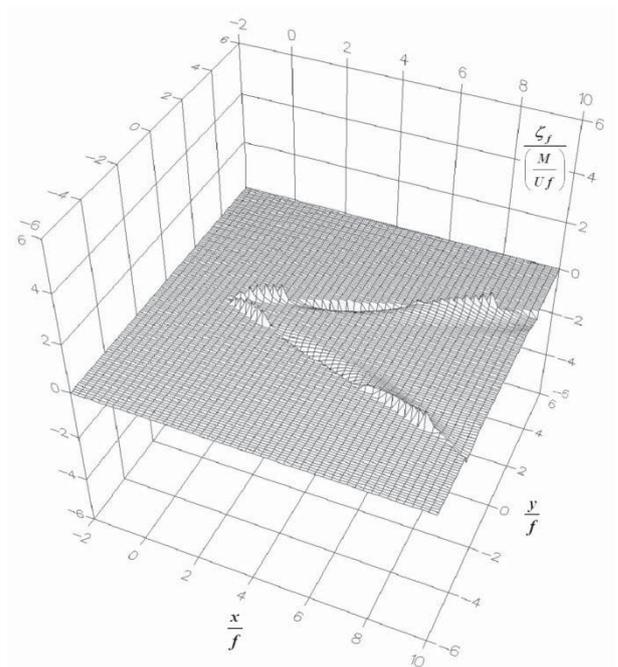


図7 縦波の鳥瞰図

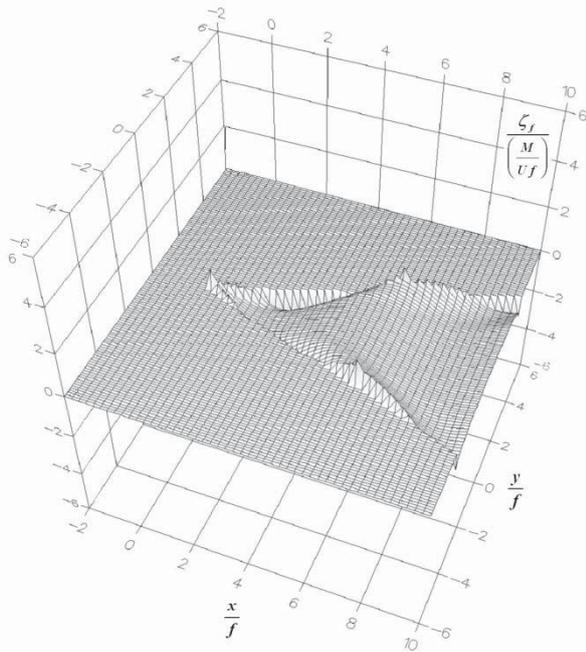


図8 Kelvin波の鳥瞰図

3.3 数値積分による波との比較

停留位相法との比較の為に、2章で導いた(21)式第2項の後続自由波 ζ_f を、近似することなく数値積分して求める。前節と同様、 $\frac{M}{Uf}$ で無次元化した波高

$$\left(\frac{M}{Uf}\right) \zeta_f = 4K_0f \int_{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sec^3 \theta \times e^{-K_0f \sec^2 \theta} \cos\left(K_0f \frac{\varpi}{f} \sec^2 \theta\right) d\theta \quad \dots(39)$$

を、附録に示す Fillon の積分法を区分的に適用することにより、(A-3)式の R, Φ, Ω それぞれを

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) &= 4K_0f \sec^3 \theta \\ \Phi(\theta) &= -K_0f \sec^2 \theta \\ \Omega(\theta) &= K_0f \frac{\varpi}{f} \sec^2 \theta \\ &= K_0f \left(\frac{x}{f} \cos \theta + \frac{y}{f} \sin \theta \right) \sec^2 \theta \end{aligned} \right\} \dots(40)$$

として、(A-7)式の $I_c^{(n)}$ の計算式によって、直接 θ に関して数値積分する。 $K_0f=1$ に対する計算結果を、図9の下面に示す。

図9は、図5に示した停留位相法による Kelvin 波を上面に描き、下面に貼った数値積分

による自由波の結果と比較したものである。数値解は、破線で示す(25)式の Kelvin 角 $19^\circ 28'$ の外側にも波は存在しているが、 $\frac{x}{f}$ が大きくなって遠方になるに連れて、波紋を示す両者の等高線が重なっている様子が分かる。特に、 $\frac{x}{f}$ の値が7以上になると、一致度は良好となり、Kelvin 角外縁近くの谷線(等高値-1.5)の様子が捉えていることが分かる。

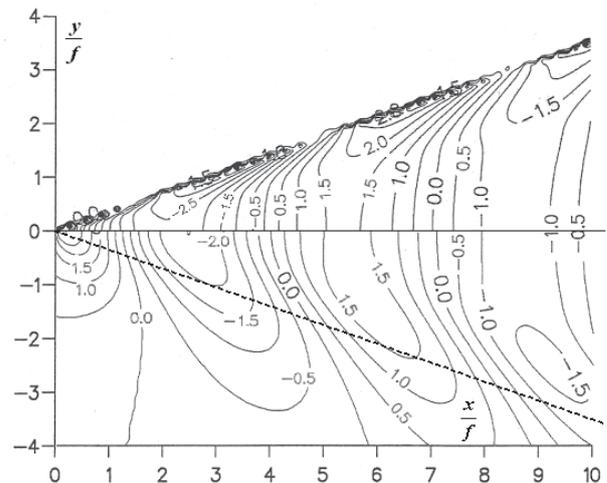


図9 停留位相法(上)と数値積分(下)による波紋図の比較

4. おわりに

停留位相法による Kelvin 波の波紋図が、数値的に積分した自由波の様子を、Kelvin 角の範囲内においては、予想以上に良く説明していることが分かった。

波高値の等高線図や鳥瞰図への可視化は、日本電子計算機(Gsharp (Ver 2.0))を用いたことを付記する。

謝辞

本稿を閉じるに臨み、長崎総合科学大学 船舶工学科の卒業研究や修士論文のテーマとして、ともに本研究の計算に携わった、小平 保文氏(常石造船)と近藤 伊織氏(聖マリア学院 中学校)に、感謝の意を表します。

参考文献

- (1) J.J.Stoker : Water Waves, Chap.8 Waves Caused by a Moving Pressure Point. Kelvin's

Theory of the Wave Pattern created by a Moving Ship, Pure and Applied Mathematics Vol.IV, pp.219-243, 1957

附 録 Fillon の積分法

$$I = \int_{\xi_A}^{\xi_B} R(\xi) e^{\Phi(\xi)+i\Omega(\xi)} d\xi \dots\dots\dots(A-1)$$

のような Fourier 積分型の積分 I を、

$$I \doteq \sum_{n=1}^N \int_{\xi_1^{(n)}}^{\xi_2^{(n)}} R(\xi) e^{\Phi(\xi)+i\Omega(\xi)} d\xi \equiv \sum_{n=1}^N I^{(n)} \dots\dots\dots(A-2)$$

$$\text{但し, } \begin{cases} R(\xi) = A^{(n)}\xi + B^{(n)} \\ \Phi(\xi) = p^{(n)}\xi + q^{(n)} \\ \Omega(\xi) = \lambda^{(n)}\xi + \varepsilon^{(n)} \end{cases} \dots\dots(A-3)$$

のように、被積分関数中の $R(\xi), \Phi(\xi), \Omega(\theta)$ それぞれを区分的に直線近似することにより、区分的な積分値 $I^{(n)}$ を解析的に求積する。これによって、被積分関数の振動が激しくても、対応する位相関数 $\Omega(\xi)$ の上下限を捉えているので、山谷を漏らすことなく、精度良く積分できる。実際、

$$I^{(n)} = \int_{\xi_1^{(n)}}^{\xi_2^{(n)}} (A^{(n)}\xi + B^{(n)}) e^{(p^{(n)}\xi + q^{(n)}) + i(\lambda^{(n)}\xi + \varepsilon^{(n)})} d\xi = A^{(n)} e^{q^{(n)} + i\varepsilon^{(n)}} \int_{\xi_1^{(n)}}^{\xi_2^{(n)}} \xi e^{(p^{(n)} + i\lambda^{(n)})\xi} d\xi + B^{(n)} e^{q^{(n)} + i\varepsilon^{(n)}} \int_{\xi_1^{(n)}}^{\xi_2^{(n)}} e^{(p^{(n)} + i\lambda^{(n)})\xi} d\xi \dots\dots(A-4)$$

と書き、解析的に積分して、

$$\left. \begin{aligned} R_j^{(n)} &= A^{(n)}\xi_j + B^{(n)} \\ \Phi_j^{(n)} &= p^{(n)}\xi_j + q^{(n)} \\ \Omega_j^{(n)} &= \lambda^{(n)}\xi_j + \varepsilon^{(n)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-5)$$

と置けば、

$$I^{(n)} = \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left\{ \frac{R_j^{(n)}}{p^{(n)} + i\lambda^{(n)}} - \frac{A^{(n)}}{(p^{(n)} + i\lambda^{(n)})^2} \right\} e^{\Phi_j^{(n)} + i\Omega_j^{(n)}} \dots\dots\dots(A-6)$$

を得る。整理して、その実部 $I_c^{(n)}$ と虚部 $I_s^{(n)}$ に分けて表記すると、

$$I_c^{(n)} = \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{R_j^{(n)} e^{\Phi_j^{(n)}}}{p^{(n)^2} + \lambda^{(n)^2} (p^{(n)} \cos \Omega_j^{(n)} + \lambda^{(n)} \sin \Omega_j^{(n)})} - \frac{A^{(n)} e^{\Phi_j^{(n)}}}{(p^{(n)^2} + \lambda^{(n)^2})^2} \left\{ (p^{(n)^2} - \lambda^{(n)^2}) \cos \Omega_j^{(n)} + 2p^{(n)}\lambda^{(n)} \sin \Omega_j^{(n)} \right\} \right] \dots\dots\dots(A-7)$$

$$I_s^{(n)} = \sum_{j=1}^2 (-1)^j \left[\frac{R_j^{(n)} e^{\Phi_j^{(n)}}}{p^{(n)^2} + \lambda^{(n)^2} (p^{(n)} \sin \Omega_j^{(n)} - \lambda^{(n)} \cos \Omega_j^{(n)})} - \frac{A^{(n)} e^{\Phi_j^{(n)}}}{(p^{(n)^2} + \lambda^{(n)^2})^2} \left\{ (p^{(n)^2} - \lambda^{(n)^2}) \sin \Omega_j^{(n)} - 2p^{(n)}\lambda^{(n)} \cos \Omega_j^{(n)} \right\} \right] \dots\dots\dots(A-8)$$

となる。結果、(A-1)式の積分 I は、上の(A-7)、(A-8)両式を区分的に用いて、

$$I \doteq \sum_{n=1}^N \{ I_c^{(n)} + i I_s^{(n)} \} \dots\dots\dots(A-9)$$

によって、数值的に求積できる。

平成 26 年 7 月 7 日 投稿



堀 勉

正会員 長崎総合科学大学 工学部 船舶工学科

(〒851-0193 長崎市 網場町 536 グリーンヒルキャンパス)

HORI_Tsutomu@NiAS.ac.jp

日本航海学会誌 NAVIGATION

平成26年10月 第190号

Oct 2014 No. 190

巻頭言 / Foreword

- 会長就任にあたって / Inaugural Address of the President 中村紳也 / Shinya NAKAMURA (1)
- 「Navigation」への誘い / Prefatory Note for the Special Topic of an Invitation for Navigation 古荘雅生 / Masao FURUSHO (2)
- 副会長就任にあたって / An Inaugural Address of the Vice-president 辻 啓介 / Keisuke TSUJI (3)

特集 <航空宇宙研究会>

- 将来のATM施策実現に向けた航空機監視技術 /
Aeronautical Surveillance Technologies for Implementing Future Air Traffic Management Plans 岸 信隆 / Nobutaka KISHI (4)
- 広域用マルチラテレーション向け追尾アルゴリズムASTRAの評価実験 /
Performance evaluation of tracking algorithm ASTRA for Wide Area Multilateration
..... 高林佑樹・亀田洋志・松崎貴史・小幡 康 / Yuki TAKABAYASHI, Hiroshi KAMEDA, Takashi MATSUZAKI and Yasushi OBATA (11)
- 受動型レーダーの開発の現状と展望 / Current Status and Prospects of Development of Passive Radar
..... 青山秀次・塩見格一 / Shuji AOYAMA and Kakuichi SHIOMI (19)
- カオス論的な音声分析による心身状態の評価—電子航法研究所の発話音声分析技術— /
Current State of Chaotic Voice Analysis Technology for Evaluation of Human Psychosomatic Condition — Chaotic Voice Analysis Method of ENRI —
..... 塩見格一 / Kakuichi SHIOMI (29)
- 航空交通管制分野における定性的安全性評価例 / Examples of Qualitative Safety Assessment in Air Traffic Control Field 天井 治 / Osamu AMAI (40)

解説・展望

- クロスベアリングによる位置計算法 / Algorithm for Position Fix by Cross Bearings 石田正一 / Shoichi ISHIDA (49)
- メートル精度の地文航法 / Algorithm for Position Fix by Radar-observed Distances 石田正一 / Shoichi ISHIDA (52)

研究・調査

- 停留位相法による船の波の計算 / Calculation of Ship Waves by means of Stationary Phase Method 堀 勉 / Tsutomu HORI (55)
- 操船シミュレータを用いた鳥取港における大型客船航行安全評価 / Valuation of Large Cruise Ship Utilizing Ship Handling Simulator in TOTTORI
..... 城戸裕晶・岩崎寛希・前畑航平 / Hiroaki KIDO, Hiroki IWASAKI and Kohei MAEHATA (63)
- Pivot Point (転心) 位置の実船操船による検出 / Finding out where the Pivot Point locates through practical ship maneuvering 佐藤昌弘 / Masahiro SATO (72)
- 平時と戦時との相克—法概念としての堪航能力の視点から— /
Contradiction between Times of Peace and War - At the Viewpoint of Seaworthiness as legal Concept - 逸見 真 / Shin Hemmi (78)
- 日本航海学会論文集 Vol.130 (2014) 目次 / The Journal of Japan Institute of Navigation Vol. 130 (2014) CONTENTS (85)
- 事務局だより / Report from Secretariat (88)

日本航海学会

Japan Institute of Navigation

c/o Tokyo University of Marine Science and Technology, 1-6, Etchujima 2, Koto-ku, Tokyo, 135-8533 JAPAN