

# 一次要素を用いた渦層モデルによる厚翼の空力特性の解析

— Macintosh による科学技術計算の奨め —

情報教育センター

堀 勉

## 1. はじめに

昨秋、金沢で開かれた造船三學會連合講演会でのことである。横浜国立大学の若いY先生が、プロペラの非定常特性解析の計算結果を発表された。勿論、その数値計結果そのものも、見事なものであったが、それより私を驚かせたのは、その計算時間に関するコメントであった。その部分を抜粋してみよう。

「尚、本研究の数値計算には RS 6000-IBM 43 P Workstation (RAM:128MB) 及び Apple Power Macintosh 9500 Personal Computer (RAM:512MB) を利用した。各々の計算機による計算時間は、RS 6000 で揚力体の計算が約8時間、複合体の計算が約40分、Macintosh による計算では、揚力体の計算が約1.5時間、複合体の計算が約15分であった。」

私は、最初聞き違えか、前刷りのミスプリかと思ひ、タマタマ一緒になった昼食のときに、当のY先生に尋ねてみたが、この結果は事実なのだそうである。勿論、このPower Mac には、512MBという膨大なメモリーが搭載されているにしろ、これは衝撃的であった。〈←少なくとも、私にとっては...〉だって、CPUに同じRISCプロセッサのPower PCを採用しているのに、IBM のワークステーションよりもMacの方が、計算が速いのだから。

後日、このことを、本学に特別講義にいらした船舶技術研究所のK博士〈←船舶流体力学の分野での計算流体力学の第一人者〉に話してみると、このことは計算流体力学を日常業務としている研究者達の間では、既成事実であり、とにかくマックのPower PCは、Pentiumに較べても、ズット速いそうなのである。しかも、最近のコンパイラーはFortranにしてもCにしても、配列を一昔前のMS-DOSの世界の上限であった64KBの枠に捉われず、前述の横浜国大の例のように、メモリーを投資すればするだけ、自由に配列を確保することができるから、数値計算をする者にとっては、アドレス操作等の複雑な技巧を施すことなく、大規模な計算が難なくデスクトップ上で行なえるという、誠にもって有り難い世の中になってきた。

帰崎後、早速私の研究室にあるPower Macintosh 8500/120のメモリーを80MBに増やし、コンパイラーとしては、最近専ら自身の数値計算プログラムをC言語で書いていることもあり、Macintosh上のFortranコンパイラーとしてMAC FORTRANの名で定評のあるAbsoft Fortranと同系列のAbsoft C/C++を購入して、計算の準備に掛かった。

手始めに、標題にある厚翼の空力特性の解析プログラムを作成して実行したところ、そのパフォーマンスは今後の研究に充分耐え得るものと判断された。

## 2. 計算法

### 2.1 一次要素で離散化した渦層モデルによる誘導速度場の表記

まず、x軸上に分布した時計回りの2次元渦層の速度ポテンシャルを、

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \phi_j \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{但し、}\phi_j \equiv - \int_{\xi_j^{\text{下}}}^{\xi_j^{\text{上}}} \gamma(\xi) \tan^{-1} \left( \frac{z}{x-\xi} \right) d\xi \dots\dots\dots(2)$$

のように離散化表記することになると、この区分的な  $\phi_j$  に対応する誘導速度場は、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \frac{\partial \phi_j}{\partial x} = z \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \gamma(\xi) \frac{1}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi \\ w_j &= \frac{\partial \phi_j}{\partial z} = - \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \gamma(\xi) \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

によって求められることになる、

ここに、渦層分布  $\gamma(\xi)$  を折れ線近似することにより、1次要素を構成すれば、図1に示すように各要素内 ( $\xi_S^{(j)} \leq \xi \leq \xi_E^{(j)}$ ) では台形分布となるから、 $\gamma^{(j)}(\xi) = A^{(j)}\xi + B^{(j)}$  と置いて、

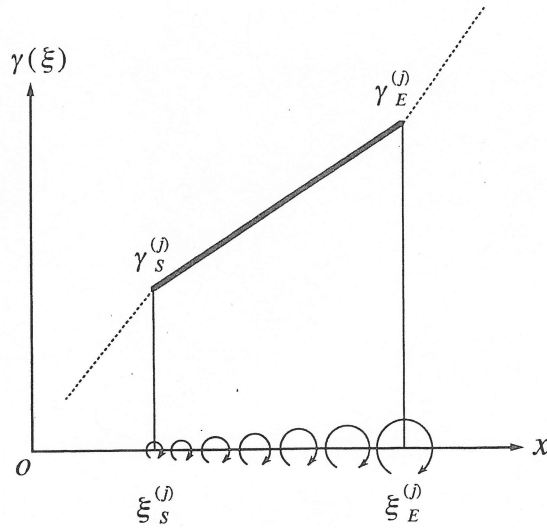


図1. 渦層モデルの1次要素

$$\left. \begin{aligned} u_j &= A^{(j)}z \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \frac{\xi}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi + B^{(j)}z \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \frac{1}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi \\ w_j &= -A^{(j)} \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \frac{(x-\xi)\xi}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi - B^{(j)} \int_{\xi_S^{(j)}}^{\xi_E^{(j)}} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+z^2} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

となり、これを項別に解析的積分を実行することにより、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= A^{(j)}z\Psi_L^{(j)} - (A^{(j)}x + B^{(j)})\Psi_T^{(j)} \\ w_j &= (A^{(j)}x + B^{(j)})\Psi_L^{(j)} + A^{(j)}z\Psi_T^{(j)} + A^{(j)}\delta\xi^{(j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

を得る。式中の  $\Psi_T^{(j)}$ 、 $\Psi_L^{(j)}$ 、 $\delta\xi^{(j)}$  は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \Psi_T^{(j)} &\equiv \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x-\xi_E^{(j)}}{z}\right) - \text{Tan}^{-1}\left(\frac{x-\xi_S^{(j)}}{z}\right) \\ \Psi_L^{(j)} &\equiv \log_e \sqrt{\frac{(x-\xi_E^{(j)})^2+z^2}{(x-\xi_S^{(j)})^2+z^2}} \\ \delta\xi^{(j)} &\equiv \xi_E^{(j)} - \xi_S^{(j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

によって定義したものであり、 $\text{Tan}^{-1}(\dots)$  は逆正接関数の主値を取ることを意味する。

ここに、(6)式中の係数  $A^{(j)}$ 、 $B^{(j)}$  は、区分的な端点での渦層密度  $\gamma_S^{(j)} = \gamma(\xi_S^{(j)})$ 、 $\gamma_E^{(j)} = \gamma(\xi_E^{(j)})$  が与えられれば、

$$\left. \begin{aligned} A^{(j)} &= \frac{\xi_E^{(j)} - \xi_S^{(j)}}{\delta\xi} \\ B^{(j)} &= \frac{\gamma_S^{(j)}\xi_E^{(j)} - \gamma_E^{(j)}\xi_S^{(j)}}{\delta\xi^{(j)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

のように書けることから、これに対応して誘導速度  $u_j$ 、 $w_j$  も、両端点での渦層密度  $\gamma_1^{(j)}$ 、 $\gamma_2^{(j)}$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \gamma_E^{(j)}U_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)}U_E^{(j)} \\ w_j &= \gamma_E^{(j)}W_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)}W_E^{(j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} U_k^{(j)} &\equiv \frac{z\Psi_L^{(j)} - (x - \xi_k^{(j)})\Psi_T^{(j)}}{\delta\xi^{(j)}} \\ W_k^{(j)} &\equiv 1 + \frac{(x - \xi_k^{(j)})\Psi_L^{(j)} + z\Psi_T^{(j)}}{\delta\xi^{(j)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

のように表記することができる。ここに、(8)式中の  $U_k^{(j)}$ 、 $W_k^{(j)}$  (但し、 $k = S, E$ ) は、それぞれ(6)式で定義した  $\Psi_T^{(j)}$ 、 $\Psi_L^{(j)}$  を組み合わせて(9)式のように計算できる

2.2 数値計算法の概要

数値計算に際しては、翼表面を  $N$  個の有限な直線要素に分割して離散解析することになる。要素分割に対する付番の回り向きは、正面側の後縁要素から前縁に向かた後、背面に沿って再び後縁に至る時計回りとする。

実際、図2に示すように、各要素に沿った局部座標  $\delta_j - \hat{x}_j \hat{z}_j$  を張れば、その座標系に対応する  $\hat{u}_j$ 、 $\hat{w}_j$

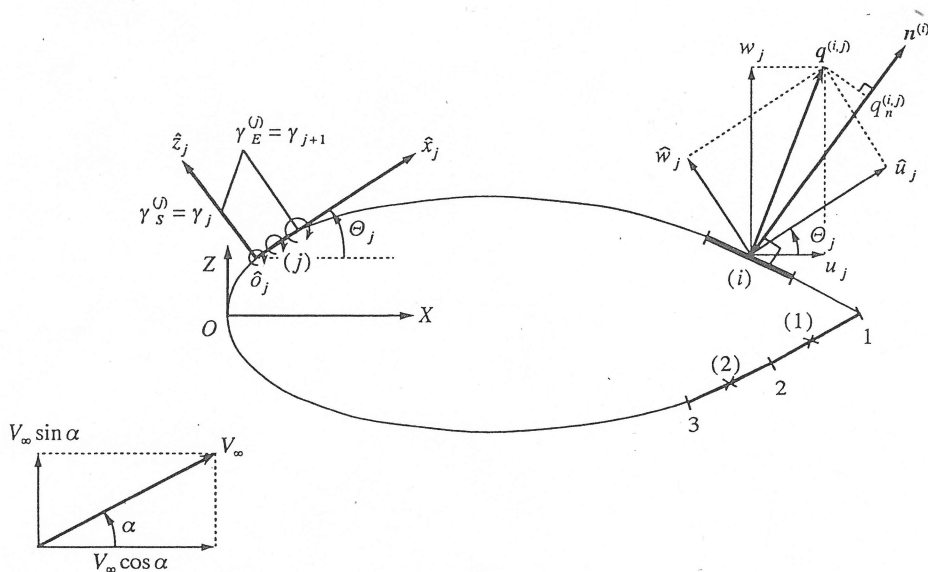


図2. 座標系と要素分割

は、前節(8)式がそのまま適用できて、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_j &= \gamma_E^{(j)} \hat{U}_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)} \hat{U}_E^{(j)} \\ \hat{w}_j &= \gamma_E^{(j)} \hat{W}_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)} \hat{W}_E^{(j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

によって計算される。ここに、式中の  $\hat{U}_k^{(j)}$ ,  $\hat{W}_k^{(j)}$  は、(9)式の  $U_k^{(j)}$ ,  $W_k^{(j)}$  を各々  $\hat{\quad}$  付きの局部座標で測って計算すればよい。但し、局部座標は、その原点  $o_j$  を各要素の始点に一致させるものとすれば、どの要素についても  $\xi_1^{(j)} = 0$ ,  $\xi_2^{(j)} = \delta\xi^{(j)}$  としてよい。

このようにして得られた誘導速度成分  $\hat{u}_j$ ,  $\hat{w}_j$  を、元々の空間固定  $o-XZ$  座系に再変換することを考えよう。その速度成分を  $u_j$ ,  $w_j$  と記せば、両者の間には、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \hat{u}_j \cos \theta_j - \hat{w}_j \sin \theta_j \\ w_j &= \hat{w}_j \cos \theta_j + \hat{u}_j \sin \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

のような関係がある。ここに、 $\theta_j$  は、局部座標  $o_j-x_jz_j$  と空間固定座標  $o-XZ$  との成す角である。このことにより、 $u_j$ ,  $w_j$  は、

$$\left. \begin{aligned} u_j &= \gamma_E^{(j)} U_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)} U_E^{(j)} \\ w_j &= \gamma_E^{(j)} W_S^{(j)} - \gamma_S^{(j)} W_E^{(j)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

$$\text{但し, } \left. \begin{aligned} U_k^{(j)} &= \hat{U}_k^{(j)} \cos \theta_j - \hat{W}_k^{(j)} \sin \theta_j \\ W_k^{(j)} &= \hat{W}_k^{(j)} \cos \theta_j + \hat{U}_k^{(j)} \sin \theta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

のように書き表わすことができ、 $U_k^{(j)}$ ,  $W_k^{(j)}$  (但し、 $k = S, E$ ) は、それぞれ(10)式中に現われる  $\hat{U}_k^{(j)}$ ,  $\hat{W}_k^{(j)}$  を座標変換した形として得られている。

以上の結果、 $j$  番目の渦層からの影響による翼面上の  $i$  番目のコントロール・ポイントでの法線速度成分  $q_n^{(ij)}$  は、その方向余弦を  $(n_x^{(i)}, n_z^{(i)})$  とするとき、速度ポテンシャルに関する(1)式の定義により、

$$q_n^{(ij)} = \frac{1}{2\pi} (u_j^{(i)} n_x^{(i)} + w_j^{(i)} n_z^{(i)}) \dots\dots\dots(14)$$

によって計算できる。ここに、 $u_j^{(i)}$ ,  $w_j^{(i)}$  の表記として(12)式を採用すれば、結局  $q_n^{(ij)}$  は、要素両端の分布密度  $\gamma_S^{(j)}$ ,  $\gamma_E^{(j)}$  を用いて、

$$q_n^{(ij)} = \gamma_E^{(j)} \cdot \Omega_S^{(ij)} - \gamma_S^{(j)} \cdot \Omega_E^{(ij)} \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{但し, } \left. \begin{aligned} \Omega_S^{(ij)} &= \frac{1}{2\pi} (U_S^{(ij)} n_x^{(i)} + W_S^{(ij)} n_z^{(i)}) \\ \Omega_E^{(ij)} &= \frac{1}{2\pi} (U_E^{(ij)} n_x^{(i)} + W_E^{(ij)} n_z^{(i)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

のように求め得ることが分かる。ここに、各要素両端の  $\gamma_S^{(j)}$ ,  $\gamma_E^{(j)}$  には、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_S^{(j)} &= \gamma_j (= \gamma_E^{(j-1)}) \\ \gamma_E^{(j)} &= \gamma_{j+1} (= \gamma_S^{(j+1)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

のような重なりがあるから、通し番号を振って  $\gamma_j$  とすれば、(15)式の  $q_n^{(ij)}$  を

$$q_n^{(ij)} = -\gamma_j \cdot \Omega_E^{(ij)} + \gamma_{j+1} \cdot \Omega_S^{(ij)} \dots\dots\dots(18)$$

のように書くことができる。そこで、全ての渦要素からの法線速度成分  $q_n^{(ij)}$  の総和として得られる法線速度成分  $q_n^{(i)}$  を、 $\gamma_j$  に関して纏めると、

$$\begin{aligned} q_n^{(i)} &= \sum_{j=1}^N q_n^{(ij)} \\ &= \sum_{j=1}^N (-\gamma_j \cdot \Omega_E^{(ij)} + \gamma_{j+1} \cdot \Omega_S^{(ij)}) \\ &= -\gamma_1 \cdot \Omega_E^{(i,1)} + \gamma_2 \cdot \Omega_S^{(i,1)} \\ &\quad -\gamma_2 \cdot \Omega_E^{(i,2)} + \gamma_3 \cdot \Omega_S^{(i,2)} \\ &\quad -\gamma_3 \cdot \Omega_E^{(i,3)} + \gamma_4 \cdot \Omega_S^{(i,3)} \\ &\quad \vdots \\ &\quad -\gamma_j \cdot \Omega_E^{(ij)} + \gamma_{j+1} \cdot \Omega_S^{(ij)} \\ &\quad \vdots \\ &\quad -\gamma_{N-1} \cdot \Omega_E^{(i,N-1)} + \gamma_N \cdot \Omega_S^{(i,N-1)} \\ &\quad -\gamma_N \cdot \Omega_E^{(i,N)} + \gamma_{N+1} \cdot \Omega_S^{(i,N)} \\ &= -\gamma_1 \cdot \Omega_E^{(i,1)} + \sum_{j=2}^N \gamma_j \cdot (\Omega_E^{(ij-1)} - \Omega_E^{(ij)}) + \gamma_{N+1} \cdot \Omega_S^{(i,N+1)} \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

のように離散化表記できる。

一方、流場は、迎角  $\alpha$  を有する一様流速  $V_\infty$  と、渦層モデルによる攪乱流の重量によって構成される。翼面上での境界条件は、コントロール・ポイントとして各要素の midpoint で満足させることにすれば、一様流速  $V_\infty$  の法線成分と(19)式の  $q_n^{(i)}$  の和が、

$$q_n^{(i)} + V_\infty \cdot (n_x^{(i)} \cos \alpha + n_z^{(i)} \sin \alpha) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

のようにゼロになることを要請すればよいから、結果として  $\gamma_j$  を未知数とする

$$-\gamma_1 \cdot \Omega_E^{(i,1)} + \sum_{j=2}^N \gamma_j \cdot (\Omega_S^{(ij-1)} - \Omega_E^{(ij)}) + \gamma_{N+1} \cdot \Omega_S^{(i,N+1)} = -V_\infty \cdot (n_x^{(i)} \cos \alpha + n_z^{(i)} \sin \alpha) \dots\dots\dots(21)$$

の形の条件式を、 $i$  番目から  $N$  番目のコントロール・ポイントについて、 $N$  個得ることになる。

但し、各端点での渦強さに相当する未知数  $\gamma_j$  は、都合  $N+1$  個あり、条件式が 1 個不足することになる。しかしながら、これは流れが翼後縁から滑らかに流れることを要請する所謂クッターの条件として、

$$\gamma_1 + \gamma_{N+1} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

のように、後縁における上下面での渦強さの和がゼロとなることを課すことにより、解消できる。実際、このクッターの条件を使って、(21)式から背面側の後縁における  $\gamma_{N+1}$  を消去することにより、

$$-\gamma_1 \cdot (\Omega_E^{(i,1)} + \Omega_S^{(i,N+1)}) + \sum_{j=2}^N \gamma_j \cdot (\Omega_S^{(i,j-1)} - \Omega_E^{(i,j)}) = -V_\infty \cdot (n_x^{(i)} \cos \alpha + n_z^{(i)} \sin \alpha) \dots\dots\dots(23)$$

を得る。結果、未知数  $\gamma_1$  から  $\gamma_N$  の  $N$  個に対して、解くべき 1 次方程式も  $N$  個構成され、これを連立させて解くことにより、全ての  $\gamma_j$  を決定することができる。

次に、翼に働く流体力について考える。揚力  $L$  は、運動量定理により、翼周りの総循環量に対応して得られることになり、揚力係数  $C_L$  の形で、

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c} = 2 \int_{Wing\ Contour} \gamma(\xi) d\xi \dots\dots\dots(24)$$

によって求められ、流体密度  $\rho$ 、一様流速  $V_\infty$ 、翼弦長  $c$  を規準に無次元化したものである。離散的には、今回の空力解析に 1 次要素を採用していることから、解かれた循環密度の分布  $\gamma_j (j = 1, 2, 3, \dots, N, N+1)$  を用いて、 $C_L$  は、

$$C_L = \sum_{j=1}^N (\gamma_j + \gamma_{j+1}) \delta \xi^{(j)} \dots\dots\dots(25)$$

によって算定できることになる。

3. 計算結果

計算対象として、図 3 に示すような 2 種類の NACA 翼を選んだ。(a) が NACA0012 でキャンバー・ラインが直線の対称翼、(b) が NACA4412 で、キャンバー・ラインが曲線状のもので、共に翼厚は弦長の 12% である。要素分割は、キャンバー・ライン上を均等に 80 分割した。結果、翼の上下面合わせて都合  $N = 160$  の 1 次要素によって構成され、各要素の端点を図中にマークしておいた。因みに、この程度に細分化した要素分割に対して、作成した C 言語によるソース・プログラムのステップ数は 490 程度で、コンパイル&リンクした実行ファイルの容量は 128Kbyte、実行時に要するメモリーの容量は 724byte であり、実行時間は結果のファイル出力を含めて僅か 2sec. 程度であった。ここにも、Power-PC 搭載のマックintosh の計算パフォーマンスの高さを垣間見ることができる。

早速、計算結果を示そう。図 4, 5 に、それぞれの翼に対する弦長方向の渦層の  $\gamma$  分布を示す。共に、161 元の連立 1 次方程式を解いて得られた結果である。図 4 は、NACA0012 翼に対するもので、迎角  $\alpha$  が  $10^\circ, 20^\circ$  の場合の結果であり、縦軸の渦層密度  $\gamma$  は、迎角  $\alpha$  でスケーリングしてある。一方、図 5 は NACA4412 翼に対する結果で、この場合、迎角  $\alpha$  がゼロでも揚力を生ずるため、ゼロ揚力角  $\alpha_0 = -4.2^\circ$  に対する相対迎角  $\alpha' \equiv \alpha - \alpha_0$  が、 $\alpha' = 10^\circ$  と  $\alpha' = 20^\circ$  の場合を示し、縦軸の渦  $\gamma$  もその  $\alpha'$  でスケーリングした結果である。同図中、薄翼と書いた結果は、翼厚を無視し、キャンバー・ラインに  $N = 80$  の 1 次要素を貼り付け、同様な解析を行なって得られた解である。このように、ゼロ揚力角からの相対迎角を描いて比較すれば、キャンバー・ライン形状に拘わらず、前縁付近を除けばほぼ同様な分布形状に纏め得ることが分かる。また両図から、相対的には低迎角の方が、上下面間での分布密度  $\gamma$  の差が大きく生ずるものの、両者を加えた結果は、前縁付近を除けば、共に翼厚を無視した薄翼の結果に、ほぼ重なってくる事が分かる。したがって、この程度の翼厚の場合、循環分布  $\gamma$  に対する厚み効果は、キャンバー・ライン上で薄翼に換算すれば余り大きく生じず、薄翼理論が良好な近似となっていることが分かる。

実際、図 6 には、迎角  $\alpha$  ベースの揚力係数  $C_L$  の計算結果を示す。(a) が NACA0012 翼、(b) が

NACA4412翼に対する結果で、前章の(25)式によって算出したもので、図4、5の翼表面に沿った周回積分値に相当する。 $C_L$ カーブについては、(b)の非対称翼は、対称翼の結果を平行移動した形として得られ、結果として、 $\alpha_0 = -4.2^\circ$ の辺りで揚力がゼロとなることも分かる。ただ、揚力傾斜そのものは、キャンバー・ライン形状によって殆ど変化しないようである。なお、図中の太い実線は、平板翼に対する理論解であり、 $C_L = 2\pi\alpha$ の直線である。この結果、厚翼理論による計算値は、薄翼近似による解を10%程度上回る結果となっており、揚力に対する翼厚の効果が確認できた。

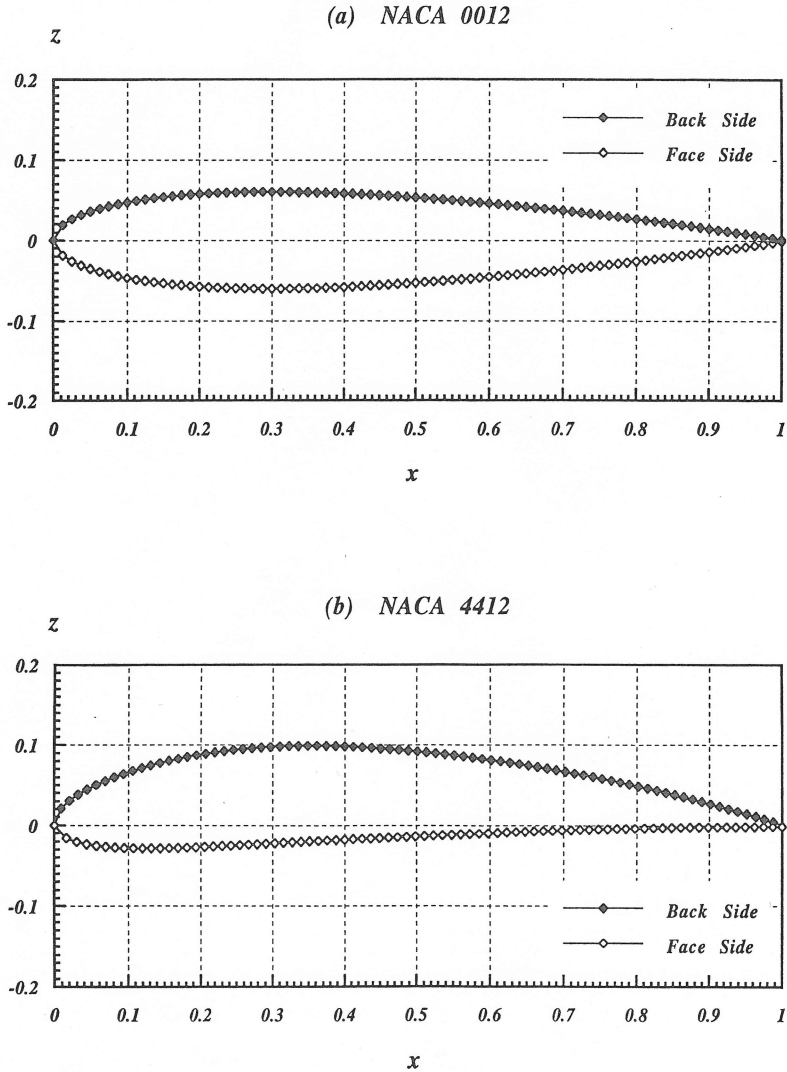


図3. NACA 翼型

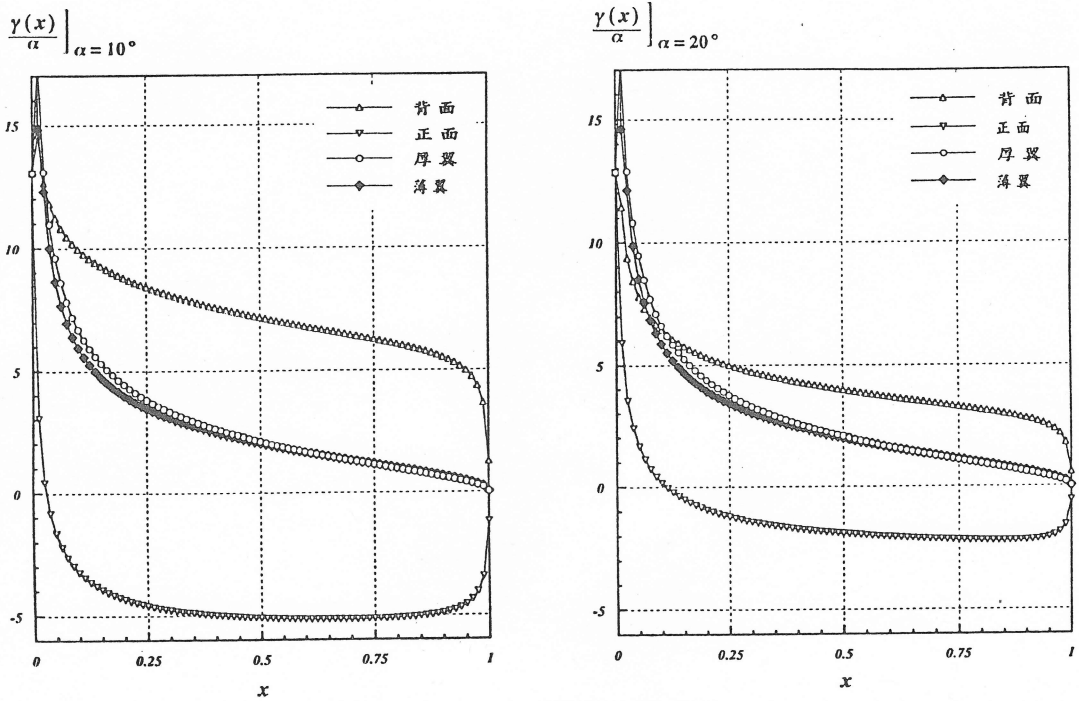


図4. NACA 0012翼の渦層分布密度  $\gamma$

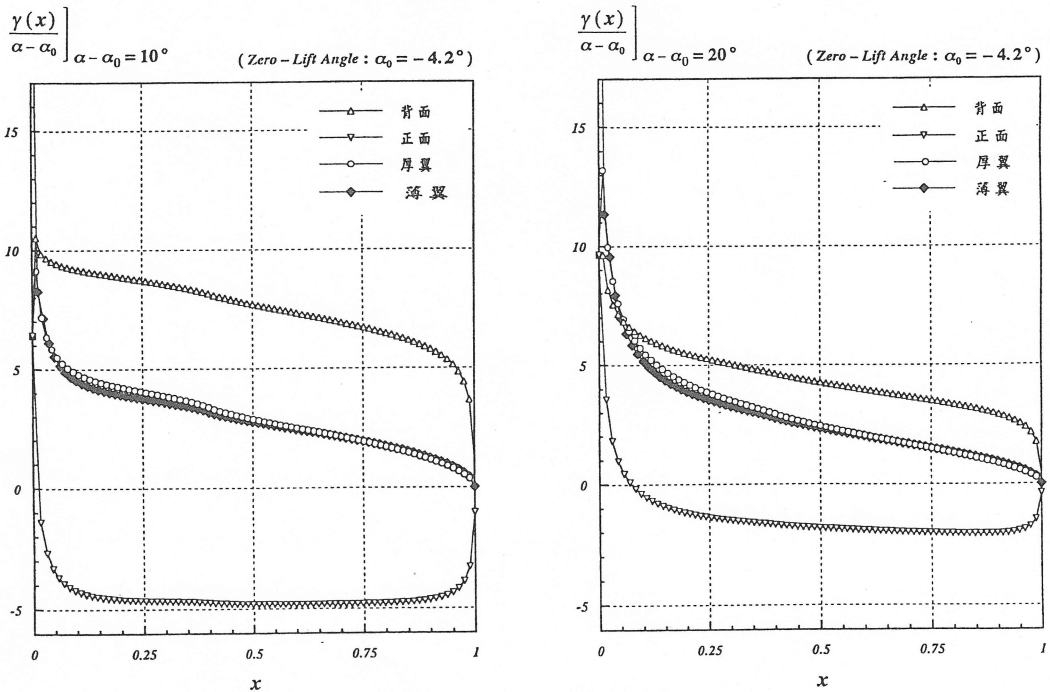


図5. NACA 4412翼の渦層分布密度  $\gamma$

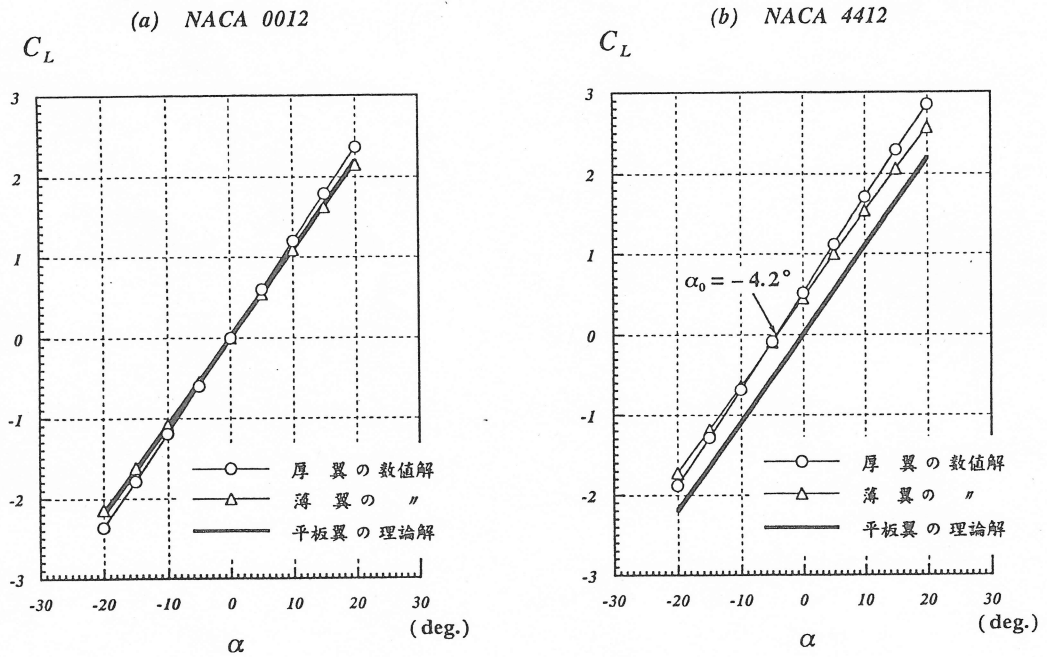


図 6. NACA 翼の揚力係数  $C_L$

4. おわりに

本稿では、Macintosh による数値計算の可能性を探る意味でのパイロット・カルキュレーションとして行なった研究ノート  
の公開とでもいふべき内容に留まった。数値解析は、2次元厚翼の揚力問題を、1次要素を用いた渦層  
モデルで定式化して行ない、厚翼に対する渦層の分布密度を可視化表記した。このような計算からグ  
ラフ化に到る迄、Macintosh を用いて容易に行ない得ることを確認した。

来年度には、3次元で、しかも渦システムによる造波グリーン関数を用いた自由表面下での揚力問題  
の計算もデスクトップ上でできる？、結果として生成されるケルヴィン波の造波パターンも？、その為  
には、もう少しメモリーを増強するか？等々、マックによる数値計算の可能性は広がるばかりである。