

斜航する船の波に対する縦切断波形解析法について

—Newman-Sharma法の非対称流場への拡張—

正員 堀 勉* 正員 田 中 一 朗**
吉 澤 正 純***

On the Wave Pattern Analysis by means of Longitudinal Cut Method for Asymmetrical Ship Waves

—An Extension of the Newman-Sharma's Method to Asymmetrical Flow Field—

by Tsutomu HORI*, *Member* Ichiro TANAKA**, *Member*
Masazumi YOSHIZAWA***

Summary

In this paper, a theoretical evolution of wave pattern analysis is presented in order to determine the lateral force and the resistance caused by wave generation by measuring the asymmetrical ship waves which are created by running ship hull with steady drift angle on a calm water. It is proposed that the amplitude function of elementary waves propagated toward the opposite side of each measured side is determined, when we transform the two sheets of wave profile measured along the longitudinal cuts parallel to the ship's course on both port and starboard sides, by means of Fourier integral similar to what is called Newman-Sharma's method.

The presented method of asymmetrical wave pattern analysis is applied to theoretical wave pattern generated by a submerged point doublet with oblique axis in order to confirm the reasonableness of presented method. The effects of the radiation condition of ship waves on the equation of wave pattern analysis are also theoretically studied in the case that the lateral position of longitudinal cut goes to infinity sideways. Lastly, we towed a floating prolate spheroid, which length is 4 times breadth, with steady drift angle and measured the wave profiles on both ship sides. From the two sheets of wave profile, the lateral force and the resistance caused by wave generation are directly determined.

1. 序 論

船の造った波を計測することにより、船体に働く力の測定を行わずして造波抵抗を直接算定しようとする試みは、1963年 Michigan 大学で開催された造波抵抗理論に関する国際セミナーの席上で、Newman¹⁾ や Sharma²⁾, 更には Shor³⁾ 等によって提唱された。以来、定常造波抵抗の分野では、縦切断計測した波形を Fourier 変換することによって自由波の振幅関数を決定するという手法が、計測ならびに解析の容易さと相まって普及してきた。現在では、この Newman-Sharma 法と称される波形解析法が船型試験に組み入れられ、抵抗成分の分離や船型改良などの問題に対し、実験的にも理論的にも有用な結果を供し続けている^{4), 5), 6)}。ただ、この手法は抵抗・推進の分野を中心に発

*九州大学 応用力学研究所 津屋崎海洋災害実験所

**大阪大学 工学部 造船学教室

***石川島播磨重工業(株) 東京第一工場 (研究当時：大阪大学大学院工学研究科修士課程在学)

展してきた為、解析は専ら直進中の船の波を対象に流場の対称性を前提として進められてきた。従って、船が斜航する時などに生成される左右非対称な波に対する解析は例を見ず、その解析法自体についても検討されていないように思われる。一方、非定常の分野では耐航性能の観点から、大楠⁷⁾によって縦運動しながら前進する船の造る非定常波紋を縦切断計測することにより、波浪中の抵抗増加を直接算定する非定常波形解析の手法が開発された。更に大楠⁸⁾は、この手法を船体横運動時の反対称流場にも適用し、造波減衰力の直接算定に成功している。

以上概観してきたように、定常造波抵抗の分野で開発された Newman-Sharma 法による波形解析法が、非定常の分野では対称流場のみならず反対称流場に対しても積極的に応用されているにも拘わらず、母体である定常造波の分野では依然として直進中の対称流場に対する域を出ず、斜航時の非対称流場への拡張は未だ成されていないのが現状である。他方、著者らは定常斜航する船体に作用する造波に因る横力について、主に理論的側面から研究を進めて来た^{9), 10)}。ここに理論の直接的な検証の観点から、直進時の対称流場に対して確立された波形解析の手法を斜航時の非対称流場に拡張することができれば、造波横力を剥離渦等の循環成分から生ずる揚力と分離して計測することが可能となり、実験解析の面からも望まれるところである。また、この波形解析法の導入により、造波横力を単なる力のレベルに留まらず振幅関数のレベルから論ずることができるばかりか、斜航時の船が生成する非対称な波の組織構造について素成波のレベルまで溯って解き明かすことが期待される。

本論文では上述の状況に鑑み、まず定常斜航する船の波を計測して造波に因る横力や抵抗を直接算定する為の波形解析理論の展開を試みる。解析手法としては、Newman-Sharma 法に倣っており、これを非対称流場に拡張した結果、船の左右両舷で縦切断計測した二枚の波形を Fourier 変換することによって各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して、非対称流場での振幅関数を決定し得ることを示す。次に、開発した手法を没水した単一の斜軸 Doublet が生成する理論波形に適用し、その妥当性を確認すると共に、計測波形と振幅関数を結ぶ波形解析の算式を導くに当たり、生成波の放射条件を考慮することの重要性を具体例を挙げて示す。更に、半没回転楕円体 ($L/B = 4$) を実際に曳航水槽で斜航させ、両舷での二枚の実測波形から造波横力や造波抵抗を算定した。ただし、実験的には流体力の計測を行っていないなど不十分な部分も多いが、ここに波形解析法における Newman-Sharma 法の非対称流場への拡張という意味で御報告し、諸賢の御批判を仰ぐ次第である。

2. 波形解析理論の展開

船が静止水面上を定常航走する時に造る波について考える。座標系は Fig. 1 に示すように、静止水面上の船体中央に座標原点 o を配し、一様な流れ方向に x 軸、右舷方向に y 軸、これらと直交するよう鉛直上向きに z 軸を採ったデカルト座標とする。また、物理量は全て、船長 L 、一様流速 U_∞ 、流体密度 ρ を規準に無次元化して扱うものとする。したがって、長さ 1 の船体が大きさ 1 の流れの中に β だけ斜航角を付けて置かれているとして、Fig. 1 のような問題を設定する。

定常斜航する船によって生成される波は、造波に及ぼす三次元剥離等の粘性影響を無視し、Havelock's Wave Source Potential の名で知られる線型自由表面条件を満足する造波グリーン関数^{11) Eq. (13.38)}を用いた解析を行う限り、直進時と同様な取り扱いができる。したがって、このときの波紋 $\zeta(x, y)$ について考えると、船からある程度離れた遠方では局部攪乱波の影響は消え、船体表面に分布する波源も座標原点に集約して考えることができるため、 $y > 0$ なる右舷側では、

$$\zeta(x, y) \underset{\sqrt{x^2+y^2} \gg 1}{\sim} \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) \cos(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta) + S(\theta) \sin(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta)\} d\theta$$

(ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$)

(1)

のように、 θ 方向に伝播する二次元的な素成波が合成された形で、座標原点から生成される後続自由波として捉えることができる。この場合、流場は非対称となるから、振幅関数 $C(\theta)$ 、 $S(\theta)$ は直進中のように偶関数とはならない。また、積分下限に現れる θ は、

$$\theta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

と定義したものであり、Fig. 1 に示すように標点 (x, y) の座標原点 o に対する偏角を意味し、(1)式のように $y > 0$ なる右舷側では $0 \leq \theta \leq \pi$ である。ここに、上流 ($x \rightarrow -\infty$) では $\theta = \pi$ となり、積分下限が $\pi/2$ となって上限に等しくなることから、船の前方には波が生成されないことになる。このことから、波形の表示式(1)に対して偏角 θ を考慮することは、物理的には波の群速度が船の前進速度 U_∞ よりも遅い事に帰因する、船の前方には波が生じないという生成波の放射条件を自動的に満足させるという意味を持つ。また、(1)式中の ϖ と γ_0 は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \varpi &\equiv x \cos \theta + y \sin \theta \\ \gamma_0 &\equiv \frac{gL}{U_\infty^2} = \frac{1}{F_n^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

と定義したもので、 ϖ は原点 o から標点 (x, y) までの素成波の伝播距離、 γ_0 は無次元波数であり、重力加速度を g 、フルード数を F_n と記したものである。

本論では、解析手法⁵⁾としては Newman-Sharma 法に倣って、(1)式に従う波形 ζ を $y = y_c$ の断面で縦切断し、

$$\mathfrak{F} \equiv \lim_{X_\infty \rightarrow -\infty} \int_{-X_\infty}^{X_\infty} \zeta(x, y_c) e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \quad (\text{ただし、} \phi > 0) \quad (4)$$

のように、無限上流から無限下流に亘って、 x 方向に Fourier 変換することを考える。ここに、Fourier 変換の引数 ϕ は取りあえず正であるとして、以下の議論を進める。

このとき \mathfrak{F} に対する算式は

$$\mathfrak{F} = \lim_{X_\infty \rightarrow -\infty} \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \int_{-\tan^{-1}\left(\frac{x}{y_c}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left[C(\theta) \cos\{\gamma_0(x + y_c \tan \theta) \sec \theta\} + S(\theta) \sin\{\gamma_0(x + y_c \tan \theta) \sec \theta\} \right] d\theta \quad (5)$$

となり、 θ の積分範囲に偏角の影響が反映されていることから、 θ と x に関する重複積分は、Fig. 2 に示す斜線部の領域について行わねばならない。ここに、 θ と x に関する積分順序を交換し、 x に関する積分を先に実行するためには、積分領域を $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_\infty}{y_c}\right)$ を境に、大部分の曲線状の領域 I $\left(-\tan^{-1}\left(\frac{X_\infty}{y_c}\right) \leq \theta \leq \tan^{-1}\left(\frac{X_\infty}{y_c}\right)\right)$ と逆斜線で示す幅の狭い矩形状の領域 II $\left(\tan^{-1}\left(\frac{X_\infty}{y_c}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ に分割して、

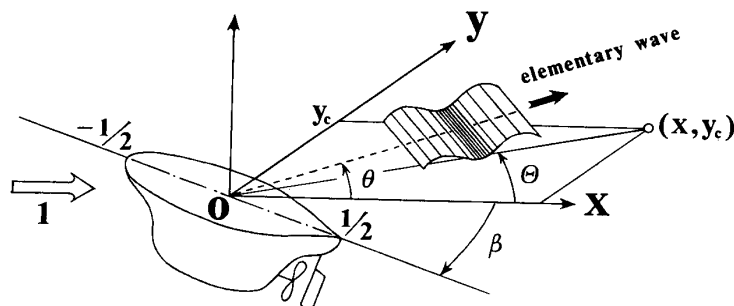


Fig. 1 Cartesian Coordinate System and Definitions of Some Basic Quantities in the Problem of Asymmetrical Ship Waves.

$$\underbrace{\int_{-\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})} d\theta \int_{-y_c \tan \theta}^{X_\infty} (\dots) dx}_{\text{領域 I}} + \underbrace{\int_{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-X_\infty}^{X_\infty} (\dots) dx}_{\text{領域 II}} \quad (6)$$

のように積分を行う必要がある。実際、(5)式の大括弧内を以下の積分演算の便を図って複素表示に書き改め、若干の整理の後、(6)式に従って \mathfrak{F} を書き下すと、

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})} \{C(\theta) - iS(\theta)\} d\theta \\ &\quad \times \int_{-y_c \tan \theta}^{X_\infty} e^{i\gamma_0(x(\sec\theta + \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})} \{C(\theta) + iS(\theta)\} d\theta \\ &\quad \times \int_{-y_c \tan \theta}^{X_\infty} e^{-i\gamma_0(x(\sec\theta - \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) - iS(\theta)\} d\theta \\ &\quad \times \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{i\gamma_0(x(\sec\theta + \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{\tan^{-1}(\frac{X_\infty}{y_c})}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) + iS(\theta)\} d\theta \\ &\quad \times \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{-i\gamma_0(x(\sec\theta - \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \end{aligned} \quad (7)$$

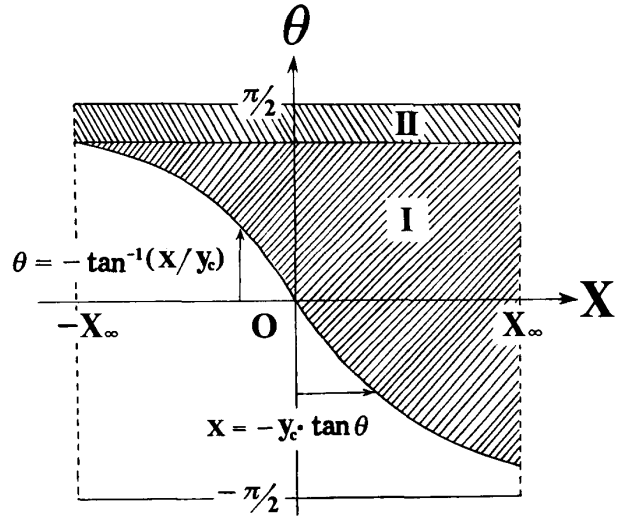


Fig. 2 Integral Domain on Fourier Transform of Ship Waves.

となる。ここに、第1項と第2項は領域 I について得られたものであり、第3項と第4項は領域 II からの寄与である。ただ、今の場合 Fourier 変換の値として $X_\infty \rightarrow \infty$ なる極限值のみが意味を持ち、切断位置 y_c は有限であるから当然 $X_\infty \gg y_c$ が成立し、この関係を θ の積分範囲に適用すると、領域 II は縮退して、(7)式の第3項と第4項は消失する。このとき、第1項と第2項の θ に関する積分区間も、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間に延長されることになり、 x に関する積分を実行して記せば、波形の Fourier 変換 \mathfrak{F} を算定する問題が、結局

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{2i\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\sec\theta + \sec\phi} \cdot [e^{i\gamma_0(X_\infty(\sec\theta + \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} - e^{-i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi}] d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2i\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\sec\theta - \sec\phi} \cdot [e^{-i\gamma_0(X_\infty(\sec\theta - \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} - e^{-i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi}] d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

のような θ に関する単積分に帰着されたことになる。ここに、(8)式の第1行目は分母が決してゼロにならないことから、大括弧内の第1項は $X_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作によって、第2項は $y_c \gg 1$ を仮定する限り共に漸近的に消滅する。したがって、以下の解析は、切断位置 y_c が十分に右舷遠方であるとして、 $y_c \gg 1$ を前提に(8)式の第2行目に着目して進める。

そこで、振幅関数の $C(\theta)$ 、 $S(\theta)$ が、各々

$$\left. \begin{aligned} C(\theta) &= C_1(\theta) + C_2(\theta) \\ S(\theta) &= S_1(\theta) + S_2(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

のように、素成波の伝播方向 θ に関して対称成分 C_1 、 S_1 と反対称成分 C_2 、 S_2 の線型和で構成されるとし、(8)式

の積分区間を被積分関数の θ に関する対称・反対称性を利用して半分に折り返せば,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \sim & \frac{i}{\gamma_0} \lim_{y_c \gg 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_1(\theta) + iS_1(\theta)}{\sec\theta - \sec\phi} \cdot \{e^{-i\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)} \cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) - \cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi)\} d\theta \\ & + \frac{1}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow -\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_2(\theta) + iS_2(\theta)}{\sec\theta - \sec\phi} \cdot \{e^{-i\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)} \sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) - \sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi)\} d\theta \quad (10) \end{aligned}$$

と書ける。ここに、各々の中括弧内の第1項は $X_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作により、第2項は $y_c \gg 1$ の前提によって、共に被積分関数は激しく変動することになる為、分母がゼロとなる $\theta = \phi (> 0)$ の近傍のみが積分値に寄与することとなり、Fourier 変換 \mathfrak{F} を知るには、結局

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \sim & \frac{i}{\gamma_0} \cdot \{C_1(\phi) + iS_1(\phi)\} \cdot \left[\begin{aligned} & \cos(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) \lim_{\gamma_0 X_\infty \rightarrow \infty} \int_{\phi-\epsilon}^{\phi+\epsilon} \frac{e^{-i\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)}}{\sec\theta - \sec\phi} d\theta \\ & - \lim_{\gamma_0 y_c \gg 1} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{\cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi)}{\sec\theta - \sec\phi} d\theta \end{aligned} \right] \\ & + \frac{1}{\gamma_0} \cdot \{C_2(\phi) + iS_2(\phi)\} \cdot \left[\begin{aligned} & \sin(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) \lim_{\gamma_0 X_\infty \rightarrow \infty} \int_{\phi-\epsilon}^{\phi+\epsilon} \frac{e^{-i\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)}}{\sec\theta - \sec\phi} d\theta \\ & - \lim_{\gamma_0 y_c \gg 1} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{\sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\phi)}{\sec\theta - \sec\phi} d\theta \end{aligned} \right] \quad (11) \end{aligned}$$

のような特異積分の評価を要求され、これは付録 B, C に示す 2 つの積分公式を用いることにより達成される。すなわち、積分区間に現れる微小量 ϵ, δ を各々 $\frac{1}{\gamma_0 X_\infty \tan\phi \sec\phi} \ll \epsilon \ll 1, \frac{1}{\gamma_0 y_c \sec^3\phi} \ll \delta \ll 1$ なる関係を満足するように選び、付録 B, C において $F(\xi) = 1$ と置けば、各々の大括弧内の第1項には (B-5) 式で与えられる Riemann-Lebesgue の補助定理が、第2項には (C-6), (C-7) 式で与えられる同拡張定理が適用できて、積分値 \mathfrak{F} は $\phi = 0$ の近傍を除外して、漸近的に

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \sim & \frac{i}{\gamma_0} \cdot \{C_1(\phi) + iS_1(\phi)\} \cdot \frac{\pi}{\tan\phi \sec\phi} \cdot [-i \cos(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) + \sin(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi)] \\ & + \frac{1}{\gamma_0} \cdot \{C_2(\phi) + iS_2(\phi)\} \cdot \frac{\pi}{\tan\phi \sec\phi} \cdot [-i \sin(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) - \cos(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi)] \quad (12) \end{aligned}$$

のように求まり、これを整理することによって、(1)式に従う波形の x に関する Fourier 変換 \mathfrak{F} として、

$$\mathfrak{F} \sim \frac{\pi}{\gamma_0 \tan\phi \sec\phi} \cdot e^{i\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi} \cdot [C_1(\phi) - C_2(\phi) + i\{S_1(\phi) - S_2(\phi)\}] \quad (13)$$

を得ることができる。また、右辺の大括弧内は、 ϕ に関する対称・反対称性により

$$C_1(-\phi) + C_2(-\phi) + i\{S_1(-\phi) + S_2(-\phi)\} = C(-\phi) + iS(-\phi) \quad (14)$$

と記述できることから、(13)式の変数を ϕ から θ に置換することによって、右舷 ($y_c > 0$) の波形を $\theta > 0$ として Fourier 変換した結果と、振幅関数 C, S との間に介在する関係式として、

$$C(-\theta) + iS(-\theta) \sim \frac{\gamma_0}{\pi} \tan\theta \sec\theta \cdot e^{-i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c) e^{i\gamma_0 x \sec\theta} dx$$

$$(ただし, \quad y_c > 0, \quad \theta > 0) \quad (15)$$

を得る。この式が、言わば本論の結論であり、左辺の振幅関数 C, S に関する引数が $-\theta$ になっていることに特徴付けられる。したがって、この関係式(15)は Fig. 3 に図示するように、右舷側で計測した縦切断波形を Fourier 変換することにより、左舷側に伝播する素成波の振幅関数が求まることを教えている。逆に、左舷 ($y_c < 0$) での縦切断波形

$$\zeta(x, y_c) \underset{\sqrt{x^2+y_c^2} \gg 1}{\sim} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \{C(\theta) \cos(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta) + S(\theta) \sin(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta)\} d\theta$$

$$\text{(ただし, } -\pi \leq \theta \leq 0 \text{)} \quad (16)$$

を、 $\theta < 0$ として x 方向に Fourier 変換すれば、(15)式と同様な導出過程を左右反転させて迎れば、

$$C(-\theta) + iS(-\theta) \underset{y_c \ll -1}{\sim} -\frac{\gamma_0}{\pi} \tan \theta \sec \theta \cdot e^{-i\gamma_0 y_c \tan \theta \sec \theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c) e^{i\gamma_0 x \sec \theta} dx$$

(ただし, $y_c < 0, \theta < 0$) (17)

なる関係が導かれることから、左舷の波形を Fourier 変換することによって右舷の振幅関数が得られる。

このように、左右両舷で計測した二枚の縦切断波形を(15), (17)式を用いて別個に解析することにより、各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して、非対称流場における振幅関数が決定できることになる。この帰結は一見奇異に見受けられるが、Kelvin 波の横波 (θ_1) と縦波 (θ_2) が、

$$\left. \begin{matrix} \tan \theta_1 \\ \tan \theta_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\cot \theta}{4} \cdot \{1 \mp \sqrt{1-8 \tan^2 \theta}\} \quad (18)$$

の式で与えられるように^{11)Eq.(13.41)}、 θ が正值を取る時 θ_1, θ_2 は共に負値となり、逆舷側に伝播する卓越した素成波に対応して Kelvin 波の波頂線が得られていることから、妥当なものとする。ただ、この事実は、たとえ船が斜航するような非対称流場においても、造波抵抗 X_w (一様流の向きに働く x 軸方向の流体力) を算定する場合には、

$$C_{X_w} \equiv \frac{X_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L^2} = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \cos^3 \theta d\theta \quad (19)$$

のように^{11)Eq.(20.37)}、言わば振幅関数の θ に関する面積のみが問題となることから値そのものには影響しないが、特に造波横力 Y_w (一様流と直角に揚力の向きに働く y 軸方向の流体力) を算定する場合には、(19)式の造波抵抗の場合と異なり、

$$C_{Y_w} \equiv \frac{Y_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 L^2} = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \tan \theta \cos^3 \theta d\theta \quad (20)$$

のように^{11)Eq.(20.37)}、重率として更に $\tan \theta$ を乗じて積分することから、振幅関数の左右非対称性の度合いが、造波横力の作用方向を決定付けることになるから、本論で提案する(15), (17)両式を持つ意味は重要である。

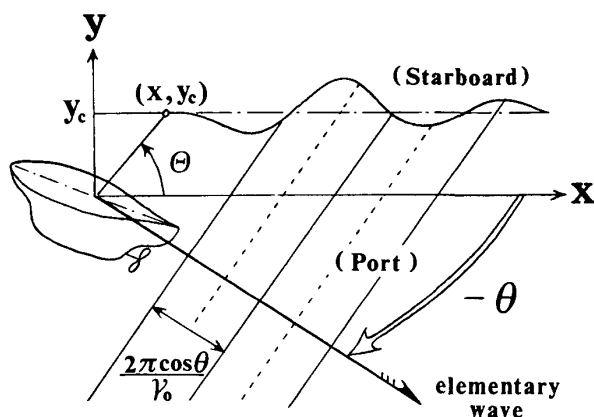


Fig. 3 Relationship between Amplitude Function of Elementary Waves and Measured Wave Profile along the Longitudinal Cut (Illustration of Eq. (15)).

3. 斜軸 Doublet の理論波形に対する解析例

本章では、簡単な数値実験として、没水した単一の斜軸 Doublet が生成する波を例にとって考える。原点 o の水面直下 $z = -f$ の点に置かれた斜軸 Doublet の振幅関数は、Doublet の強さ μ を、

$$\mu = \frac{1}{16} U_{\infty} L^3 \quad (21)$$

とし、斜軸角 β を Fig. 1 に示すように取るとき、

$$\left. \begin{aligned} S(\theta) &= -\frac{\gamma_0^2}{4} \cdot e^{-\gamma_0 f \sec^2 \theta} \cdot (\cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \theta) \cdot \sec^4 \theta \\ C(\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

のように、単純な形で与えられ、 S 波は $-x$ 方向に軸を持つ対称成分 ($\cos \beta$ の項) と、 $+y$ 方向に軸を持つ反対称成分 ($\sin \beta$ の項) の合成で表され、 C 波は存在しないことになる。ここに $\beta = 0$ の直進時には、この Doublet は没水球を表すことになるから、その直径 L を無次元長さの規準に取っている。

3.1. 縦切断波形

本節では、斜軸 Doublet から生成される非対称な波について述べる。Fig. 4 は、 $\beta = 30^\circ$ 、 $\gamma_0 = f = 1$ の場合の両舷 ($y_c = \pm 2$) での縦切断波形である。この理論波形は、(22) 式で与えられる振幅関数を、 $y_c > 0$ に対しては (1) 式に、 $y_c < 0$ に対しては (16) 式に代入し、偏角 θ の影響を考慮しながら計算して描いたものである。計算に当たっては、 θ が $\pm \frac{\pi}{2}$ に近づくにつれて、またパラメタとして γ_0 や x 、 y_c が大きくなって被積分関数の変動が激しくなっても、 θ に関して一定の刻み ($\Delta \theta \approx 1 \text{ deg.}$) で積分を実行できるように、振幅関数 C 、 S ならびに位相関数 $\gamma_0 \theta \sec^2 \theta$ を共に区分的に θ の 1 次式で近似し、Fillon の積分公式を用いて行った。ここに縦軸 ζ は、横軸 x よりスケールを 25 倍だけ引き延ばして表示している。図中、実線で示すのが、直進 Doublet ((22) 式において $\cos \beta$ が掛かる項) による左右対称な波形であり、これに反対称波 ($\sin \beta$ が掛かる項) を足し引きすることによって、破線と一点鎖線で示すような左右非対称な波が生成される。ここに、破線が $y_c = +2$ の右舷側、一点鎖線が $y_c = -2$ の左舷側での波形であり、破線で示す右舷の方が波高が高く、山谷が尖っていることが分かる。

3.2. 振幅関数

本節では、Fig. 4 のように得られた波形に Fourier 変換を施し、前章の (15)、(17) 式で提案した関係から振幅関数を再現してみる。

Fig 5 が、そのようにして得られた振幅関数である。解析に当り、波形の Fourier 変換は x に関する刻みを $\Delta x = 0.1$ として 1 次式近似の Fillon の積分公式を用いて行い、 $x = 30$ より後方の波形については、通常の Newman 修正¹⁾の方法を適用し、解析的に積分値を評価した。なお、この場合、Newman 波形による近似度 ($O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ の減衰) は、非常に良好であることを確認している。

図中の実線は、(22) 式で与えられる元々の振幅関数 S である。一方、破線で示すのが波形の Fourier 変換から得られた S 波、一点鎖線が同様な C 波である。ここに、 $\theta < 0$ なる振幅関数 S 、 C は (15) 式を介して右舷 $y_c = +2$ の切断波形から得られたものであり、逆に $\theta > 0$ なる振幅関数は、(17) 式を介して左舷 $y_c = -2$ の波形から得られている。この場合、切断位置が $y_c = \pm 2$ と比較的近く、直進時の球の 2 直径分だけしか中心線から離れていないにも拘わらず、得られた S 波は、その非対称性も含めて元々の振幅関数 S を十分な精度で再現できている。また、図に見られるように、 C 波も少量ながら得られてはいるがその値は S 波に比べて非常に小さく、元々 Doublet には C 波は存在しないという性質についても良好に再現できているようである。

以上のことから、本論で開発した (15)、(17) 式を用いる解析手法は、非対称流場での振幅関数を波形の Fourier 変

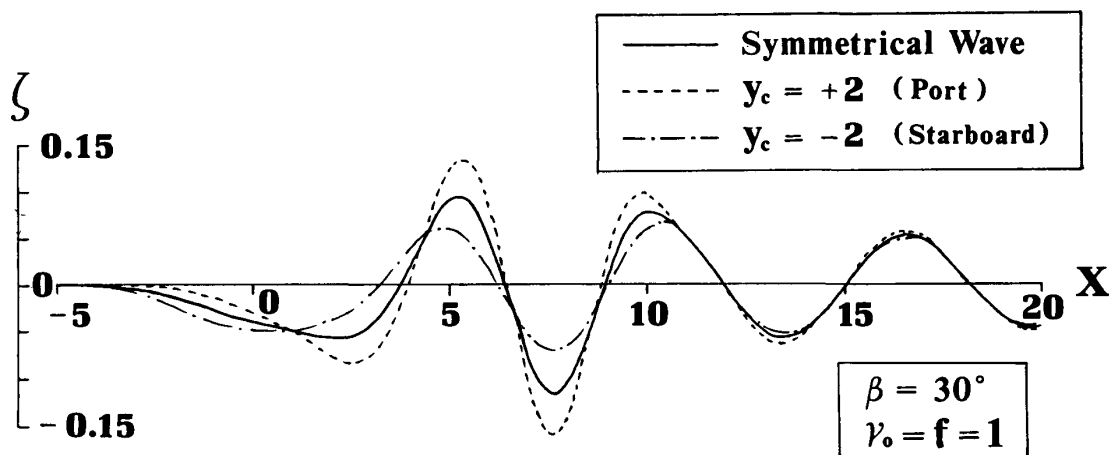


Fig. 4 Calculated Wave Profiles on the both Port and Starboard Sides Generated by a Point Doublet with Oblique Axis.

換から求める手法として有効であると言える。

4. $y_c \gg 1$ ($\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$) 近似に対する検討

第2章(15)式で提案した関係式は、波形が放射条件を満足するように、積分範囲に偏角 θ の影響を考慮した上で Fourier 変換を行った後、切断位置 $y_c \gg 1$ を仮定して漸近的に得られたものである。本章では、この経緯を無視し波形の段階で $y_c \gg 1$ の近似を行い、偏角を $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ で固定して Fourier 変換を施した場合^{2), 4)} について検討する。

4.1. 波形レベルでの検討

波形表示式(1)の段階で、 $y_c \gg 1$ なる近似を施すことは、積分下限において(2)式で定義される偏角 θ を

$$\theta(x, y_c) \underset{y_c \gg 1}{\sim} \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

で固定することになり、 θ に関する積分範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となる。このことは、反対舷に伝播する素成波の干渉を取り入れることができないことを意味し、(18)式のように(1)式の積分の停留点として得られる横波 (θ_1) と縦波 (θ_2) は共に積分の範囲外となって、(23)式の近似を行った波形からは、いわゆる Kelvin Pattern は生成されない。

実際、前章と同じ斜軸 Doublet ((22)式) が起こす波を例にとり、波形に及ぼす偏角 θ の影響を調査した結果を Fig. 6 に示す。計算状態は、Fig. 4 と全く同様に $\beta = 30^\circ$, $\gamma_0 = f = 1$ とし、上図が右舷 $y_c = +2$, 下図が左舷 $y_c = -2$ の縦切断波形を描いたものである。図中の実線が、Fig. 4 にも示した偏角 θ の影響を考慮して得られた正しい波形であり、確かに上流には波が存在せず、放射条件を満たした解であることが分かる。一方、一点鎖線で示す

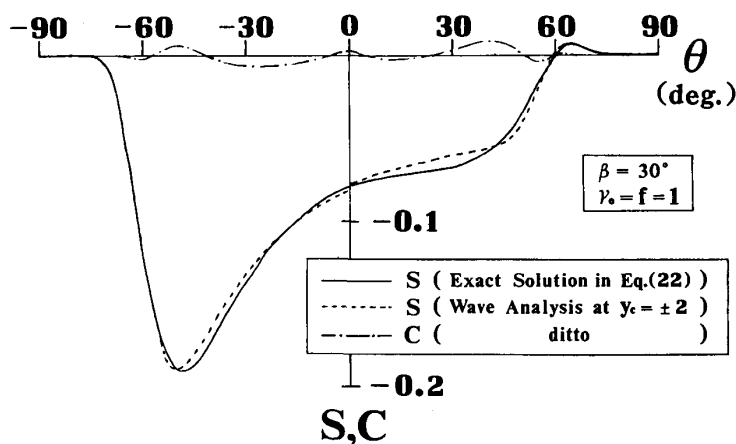


Fig. 5 Wave Amplitude Function of a Point Doublet with Oblique Axis Analyzed by Eqs. (15) & (17) in the Case of $\theta = \tan^{-1}(y_c/x)$.

波形は、 $|y_c| \gg 1$ なる近似のもとに、(1)、(16)両式において偏角を各々 $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ で固定して描いたものである。両者を見比べると、一点鎖線で示す波形は、 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ を満たす $x = 0$ の近傍では、確かに実線で示す正しい波形に一致しているが、後流での波高は両舷とも正しい波形に比してかなり低く、また偏角 θ が固定されていることから放射条件を満足し得ず、上流にも波が存在するという不合理が生じている。また、参考のため図中に併せて示した破線の波形は、逆に $x \gg 1$ なる近似のもとに偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定し、(1)式の積分を x に拘わらず $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間で行って得られたもので、通常 Kelvin Pattern の表示式を使っている。この $x \gg 1$ 近似(破線)の波形は、先程の $|y_c| \gg 1$ 近似(一点鎖線)の波形と同様に偏角を固定して描かれているため、上流にも波が残るという不合理は存在するものの、確かに下流 ($x > 4$)では図で見る限り両舷とも正しい波形(実線)に完全に一致しており、後流での近似度は非常に高いと言える。(なお、この $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$)近似を適用した波形解析手法について検討した結果を、付録 A に示す。)

4.2. 解析手法に対する理論的考察

前節での考察から、波形の段階で $y_c \gg 1$ なる(23)式の近似を行った後に Fourier 変換を施すことは、Fig. 6の一点鎖線で示すような放射条件を満足しない波形を Fourier 変換することに相当する。このような不合理は承知の上、取りあえず

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}|_{y_c \gg 1} &\equiv \lim_{X_m \rightarrow \infty} \int_{-X_m}^{X_m} \zeta(x, y_c)|_{y_c \gg 1} \cdot e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \\ &= \lim_{X_m \rightarrow \infty} \int_{-X_m}^{X_m} e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) \cos(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta) + S(\theta) \sin(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta)\} d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

(ただし、 $\phi > 0$)

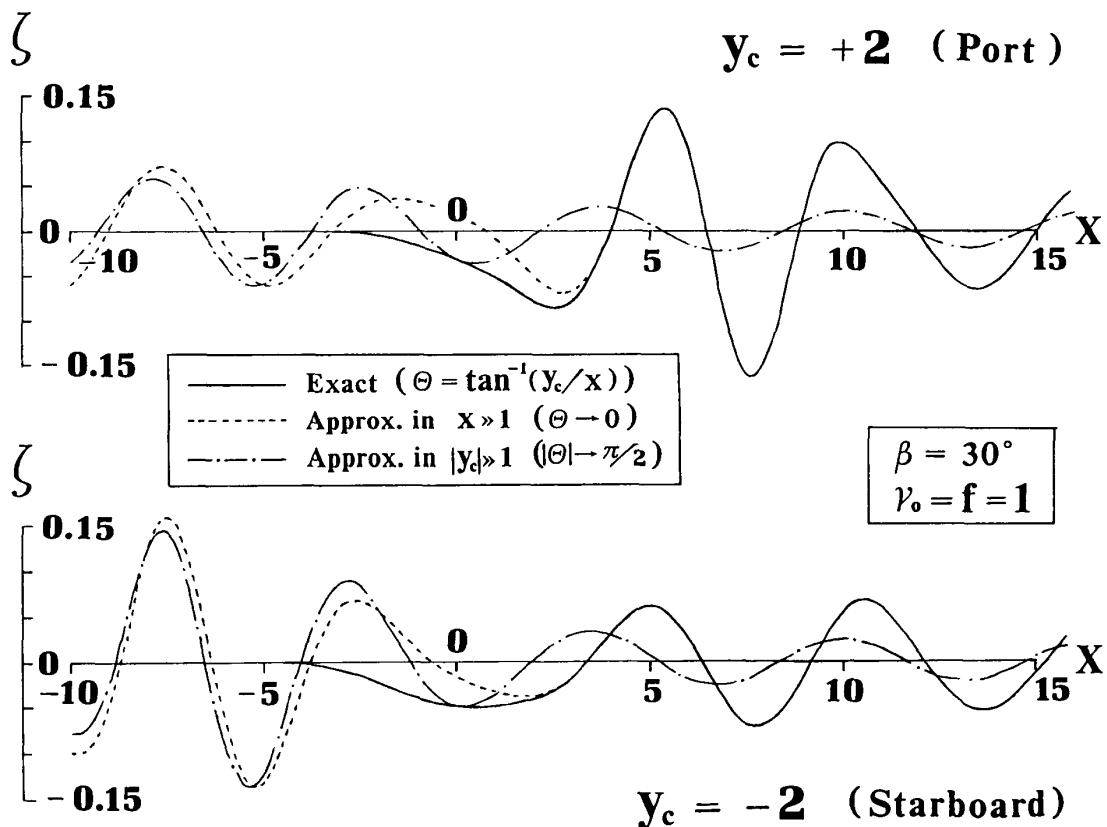


Fig. 6 Effects of Various Approximations in Argument θ on the Calculated Wave Profiles Generated by a Point Doublet with Oblique Axis.

で、Fourier 変換 $\mathfrak{F}]_{y_c \gg 1}$ を定義する。このとき、積分領域は偏角 θ を考慮した場合とは異なり、Fig. 2 の上半分に当る矩形領域となる。したがって、 θ と x に関する積分順序は単純に交換できて、

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}]_{y_c \gg 1} &= \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) - iS(\theta)\} d\theta \cdot \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{i\gamma_0(x(\sec\theta + \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) + iS(\theta)\} d\theta \cdot \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{-i\gamma_0(x(\sec\theta - \sec\phi) + y_c \tan\theta \sec\theta)} dx \end{aligned} \quad (25)$$

と表記できる。これは、第2章(7)式において、 $y_c \gg X_\infty \gg 1$ を仮定した場合に相当し、 $X_\infty \gg y_c$ なる関係から(8)式が得られた時とは全く逆の状況にある。すなわち、(25)式は、Fig. 2 に示す曲線状の領域 I が縮退したことにより(7)式の第1項と第2項が消滅する一方、矩形状の領域 II が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間に引き延ばされた結果として、(7)式の第3項と第4項から得られている。

実際、(25)式の x に関する積分は簡単に実行できて、

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}]_{y_c \gg 1} &= \frac{1}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\sec\theta + \sec\phi} \cdot e^{i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \sin\{\gamma_0 X_\infty(\sec\theta + \sec\phi)\} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\sec\theta - \sec\phi} \cdot e^{-i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \sin\{\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)\} d\theta \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここに、 $X_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作から第1項は消失し、第2項は付録(B-7)式に示す Riemann-Lebesgue の補助定理により簡単に計算できて、 $\phi = 0$ の近傍を除外すれば、 $\mathfrak{F}]_{y_c \gg 1}$ の Fourier 変換値として、

$$\mathfrak{F}]_{y_c \gg 1} = \frac{\pi}{\gamma_0 \tan\phi \sec\phi} \cdot e^{-i\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi} \cdot \{C(\phi) + iS(\phi)\} \quad (27)$$

を得る。これを $\phi \rightarrow \theta$ として書き換えることにより、右舷遠方 ($y_c \gg 1$) の波形に対して、

$$\begin{aligned} C(\theta) + iS(\theta) &= \frac{\gamma_0}{\pi} \tan\theta \sec\theta \cdot e^{i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c)]_{y_c \gg 1} \cdot e^{i\gamma_0 x \sec\theta} dx \\ &\quad (\text{ただし, } y_c > 0, \theta > 0) \end{aligned} \quad (28)$$

のような関係式が得られる。逆に、(16)式において $\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ で固定した左舷遠方 ($y_c \ll -1$) の波形に対しても同様にして

$$\begin{aligned} C(\theta) + iS(\theta) &= -\frac{\gamma_0}{\pi} \tan\theta \sec\theta \cdot e^{i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c)]_{y_c \ll -1} \cdot e^{i\gamma_0 x \sec\theta} dx \\ &\quad (\text{ただし, } y_c < 0, \theta < 0) \end{aligned} \quad (29)$$

なる関係式を導くことができる。これらの結果は、第2章(15)、(17)両式で提案した関係式と酷似しているが、左辺の振幅関数 C, S に対する引数 θ と右辺の y_c に対する指数関数の引数が、共に(15)、(17)式とは逆符号に得られており、その位相特性が反転している点が致命的である。これは先程(25)式に対して考察したように、(15)式が $X_\infty \gg y_c$ の関係から(6)式で言う領域 I に対する積分値の $y_c \gg 1$ なる漸近値として得られていることから、生成波の放射条件を考慮し得たのに対し、(28)式は結局(7)式で $y_c \gg X_\infty \gg 1$ を仮定したことに相当し、領域 II が引き延ばされた結果として得られているため、放射条件を考慮し得なかったことによる。したがって、(28)式の関係を用いて斜航時の非対称流場の解析を行うと、この式には元々両舷に伝播する素成波の干渉が考慮されていないことから、右舷側での計測波形の Fourier 変換からは、同じ右舷に伝播する素成波の振幅関数が得られ、一方、左舷の波形からは(29)式を介して、やはり左舷の振幅関数が得られることになり、(15)、(17)両式を用いた場合とは振幅関数の絶対値が左右逆転して求まることになって、(20)式からも分かるように、特に造波横力を算定する際には誤った結果を導く

ことが予想され、端的な例を次節で紹介する。

4.3. 振幅関数レベルでの検討

本節では、(28)、(29)の関係式を用いて、4.1節で検討した斜軸 Doublet の波を解析することにより、振幅関数の再現性の観点から、両式に内在する問題点を具現する。

実際、Fig. 6 の図中に実数で示す放射条件を満たす両舷 $y_c = \pm 2$ での正しい縦切断波形に、Fig. 5 を求めた際と全く同様にして Fourier 変換を施した後、(28)、(29)式を介して得られた振幅関数を Fig. 7 に示す。図中、太い実線が元々の振幅関数 S ((22)式)を表している。また、波形の Fourier 変換から得られた C 波と S 波を、各々実線と破線で示す。ここに、 $\theta > 0$ なる C 波と S 波は(28)式を介して右舷 $y_c = +2$ の切断波形から、逆に $\theta < 0$ なる C 、 S は(29)式を介して左舷 $y_c = -2$ の波形から得られている。まず目に付くことは、Doublet の場合、理論上は C 波が存在しない((22)式)にも拘わらず、解析された結果は、図に見られるように C 波と S 波が同程度に存在するばかりか、 θ に関して激しく変動する。この原因は、用いた関係式(28)、(29)の切断位置 y_c の符号が正しい(15)、(17)式と逆転して得られていることにあり、結果として、Fig. 5 のようには C 波と S 波が正しく分離抽出され得なかったものである。ただ、この変動は両者の自乗和を取れば消え、 $-\sqrt{S^2+C^2}$ の値を図中に一点鎖線で示す。この一点鎖線と太い実線を見比べると、解析された結果は、元々の振幅関数の非対称性を左右逆転して再現しているようであり、Fig. 5 の結果を対称面 ($\theta = 0$) で折り返した形で得られていることが分かる。この原因も明らかで、(28)、(29)式の左辺に現れる C 波、 S 波の引数 θ が、正しい(15)、(17)式の逆符号として得られていることにある。したがって、一点鎖線で示す振幅関数を使って(20)式から造波横力を算定すれば、その作用方向が実際とは逆向きに得られることは明白である。しかしながら、たとえ流場が Fig. 7 のように非対称であっても、造波抵抗値のみを論ずる限り $\sqrt{S^2+C^2}$ の非対称性には拘わらず、その面積のみが関与する ((19)式) ことから、一点鎖線で示す振幅関数を用いても正解と同じ値が得られることは、本章で考察した関係式(28)、(29)にとって不幸中の幸いであると言えよう。

以上の考察から、波形の段階で $|y_c| \gg 1$ 近似を施し、生成波の放射条件を無視して導かれた(28)、(29)式を用いた解析法は、造波抵抗値のみに限って正しい結果を供給するが、素成波の位相特性を含め流場の本質を捉えたものではないことが分かる。したがって、流場の対称・非対称性を問わず、Fourier 変換型の縦切断波形解析法の算式としては、2章で提案した(15)、(17)式を用いるべきであると結論される。

5. 半没回転楕円体の実測波形に対する解析例

本章では、実際に半没回転楕円体を曳航水槽で斜航させ、両舷での実測波形から

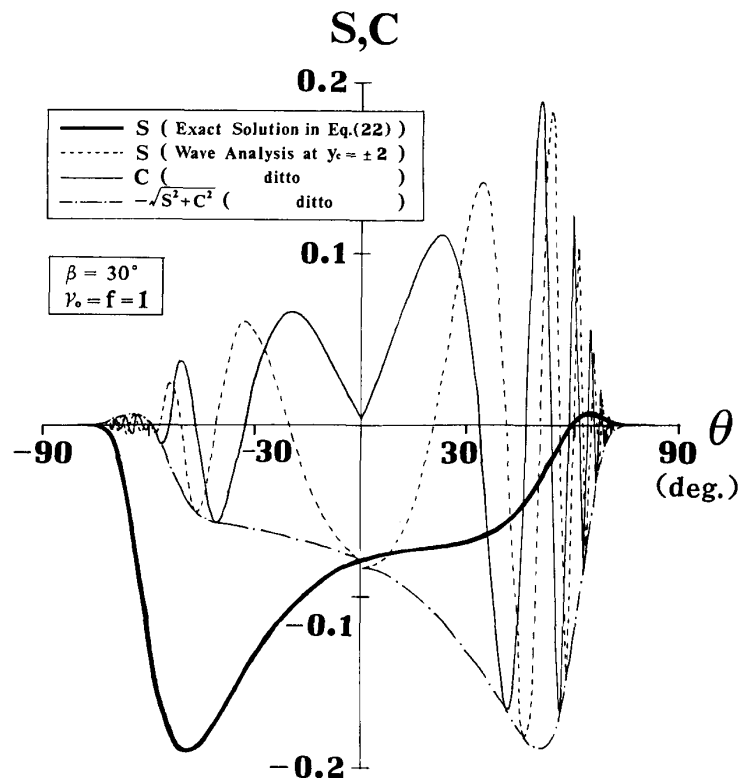


Fig. 7 Wave Amplitude Function of a Point Doublet with Oblique Axis Analyzed by Eqs. (28) & (29) in the Case of $|y_c| \gg 1$ ($\theta \rightarrow \pm \pi/2$).

(15), (17)式を介して振幅関数を決定した結果について述べる。また、得られた振幅関数から、造波横力や造波抵抗を算定した例も併せて紹介する。

5.1. 実験概要

実験は、大阪大学船舶試験水槽において、アルミ製の全長 80 cm, 細長比 $\frac{1}{4}$ の回転楕円体を中心面まで半没水させて実施した。船速は、無次元波数が整数値で $\gamma_0 = 6$ ($F_n = 0.408$, $U_\infty = 1.143\text{m/sec.}$) から $\gamma_0 = 15$ ($F_n = 0.258$, $U_\infty = 0.723\text{m/sec.}$) の 10 船速について、斜航角は $\beta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ の直進を含めた 3 状態を対象に行った。模型船の長さとの兼合いから、波高計測が可能な速度域に設定したため、相対的には高速域の実験になっており、斜航による造波現象は顕著に抽出されることが予想される。ただし、模型船として回転楕円体をそのまま半没水させたものを使用したため、高速域で且つ大斜航した場合には船首部で水を被り、通常の斜航船体周りの流場とは幾分状況が異なる。この意味では、乾舷が垂直舷側となるように遮蔽板を取り付けるなどの対策を施した方が、比較した低速造波理論との対応の面からは好ましかったと思われる。しかし、船首部で水を被らないように簡易的な遮蔽を施しても、目視観測を行う限り後続波に目立った影響は認められず、今回の実験ではこの影響は小さいものとして無視した。

波高計測には、応答特性の良い電気抵抗式波高計を用い、波高計を水槽中央の右舷側壁から伸びる梁に固定した。このとき、波高計から船体中心線までの距離は 97 cm ($y_c = 1.21$) であった。この設置位置は、経験的には妥当な位置と考えられるが、念のため標準船速 $\gamma_0 = 10$ に対してのみ、中心線から 1.65 m 離れた位置 ($y_c = 2.06$) での解析も併せて行った。結果的には計測位置による差異は、Fig. 9 に見られるように一般に許容され得る範囲内⁶⁾ に納まっており、無視することにした。

実際の計測に当っては、前後進によって 1 斜航状態の計測とすることも考えられるが、直進時の対称性を確保することの難しさを考え、前進航走のみとした。ここに、計測位置は常に右舷側に固定されているため、楕円体の船首を両舷に振って計測することにより、両舷での測定とした。したがって、都合 1 船速に対して 5 航走 ($\beta = 0^\circ, \pm 10^\circ, \pm 20^\circ$) 要することになる。なお、波高の採取周波数は 50 Hz とした。

5.2. 振幅関数に対する解析例とその考察

本節では、実際に (15), (17)式を用いて波形解析を行った結果について述べ、併せて今後に残された課題についても言及する。

Fig. 8 に、 $\gamma_0 = 8$ ($F_n = 0.354$) の場合の振幅関数を示す。ただし、縦軸には通常の重率振幅関数ではなく、便宜上 $\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ 近傍での発散傾向を押えるため、 $(C + iS) \cos^3 \theta$ で定義される Kochin 関数の自乗を取っている。上図が、両舷 $y_c = \pm 1.21$ での実測波形から (15), (17)式を介して得られた解析結果 (以下、実験値と称する) であり、下図に比較のため、低速造波理論に基づく計算結果¹⁰⁾ (以下、理論値と称する) を示す。図中、斜航角 β ごとの曲線は、それぞれ実線が $\beta = 0^\circ$ の直進時、破線が $\beta = 10^\circ$ 、一点鎖線が $\beta = 20^\circ$ の場合を示す。両者を見比べると、直進時には実験値と理論値は $\theta = 0$ 近傍を除いて (この問題については、後に述べる)、定性的にも定量的にも非常に良く一致している。このことから、少なくとも船速 $\gamma_0 = 8$ の直進状態では、低速造波理論で想定する流場が、現実の模型船周りの波動場を忠実に捉えていることをうかがわせる。また、斜航角 β に対する依存性についても、実験値、理論値ともに β の増加に伴い、振幅関数における山谷の位相が θ の正の側へ移動しており、この意味での非線型影響^{9), 10)} については低速造波理論で捉えることができるようである。しかしながら、両者の非対称性の状況に目を向けると、実験値は斜航角 β の増加に伴って、 θ の負領域では先述した位相の移動とともに振幅関数の絶対値が大きくなるのに対し、逆に正領域では振幅関数が極端に小さくなる傾向を示し、結果として実験値は、斜航時には θ の正領域よりも負領域の方が、振幅関数の絶対値が大きくなることになる。一方、理論値の方は、 $\beta = 10^\circ$ の場合には直進時との差は主に先述した位相の移動に現れ、絶対値自体は θ の正負でさほど変わらないものの、若

干上述の実験値とは逆の傾向が認められ、特に $\beta = 20^\circ$ の大斜航の場合になると、 $\beta = 0^\circ$ の直進時には $\theta = 0$ 近傍に存在した山が、先述した位相の移動に伴って θ の正領域での極端に大きな山に発達し、結果的に理論値は実験値とは逆に、斜航時の振幅関数が θ の正領域で大きく求まることになり、低速造波理論による斜航流場の推定に疑問を投げ掛けるものである。

この状況を裏付けるものとして、実際の計測波形は、 $\beta > 0$ として右舷に船首を振った状態で、図には示さなかったが、背面に相当する右舷の波高が正面に当る左舷よりも一般にかなり高く測定されており、大雑把な言い方をすると、波高の高い右舷の波形を(15)式の Fourier 変換を施して算定した θ 負領域の振幅関数が、波高の低い左舷の波形を(17)式を介して導いた θ 正領域よりも大きく得られたことは、その意味では当然の帰結と言える。ただし、船体

近傍の波高は、圧力の高い正面側（左舷）の方が背面側（右舷）よりも高く得られる¹²⁾ことを考えると、上述の計測波形に見られる傾向は奇異な印象を受ける。しかし、実験時において船首付近の造波パターンを観察すると、特に $\beta = 20^\circ$ の大斜航の場合など、(18)式の根号内が正の条件として得られる Kelvin 波の頂角 $19^\circ 28'$ よりも斜航角が大きいため、左舷では一旦生成された船首波が船体によって反射・回折され自由に伝播できないのに対し、右舷では剥離は生じているものの生成された船首波は船体に邪魔されることなく自由に伝播できることから、 $y_c = \pm 1.21$ という船長の 1.2 倍程離れた位置で計測した縦切断波形は局部波の影響を余り受けないと考えられて、この理由で自由波が充分に発達した右舷の方が左舷よりも波高が高く得られたものと思われる。以上のことから、Fig. 8 における実験値と理論値の非対称性の食い違いの主なる原因は、理論値が船首波の船側（特に正面側）での反射・回折を何一つ考慮していないことにあると推察される。したがって、今後低速造波理論を用いて斜航流場を推定する際には、二重模型流場に剥離渦や循環流れの影響を取り入れることは二次的な問題であり¹⁰⁾、船首波の伝播に対して何らかの形で船体表面条件を課すことが最重要課題であると考えられる。

また、実験的にも問題がないわけではなく、今回使用した模型船の全長が 80 cm と小型であることから、計測された波高の絶対値が小さく、特に船速が低いとき、後方の打ち切り点付近で波高が常に正值を取ったり負値を取ったりするという現象が現れた。これは水槽静振の影響と考えられ、水槽全長を一波長とする長周期の定在波に船の生成した波が乗った結果、うねりの振幅が船の波の振幅に比べて無視できないほどの大きさに達しているために起こると推察される。これは計測技術の面からはゼロ点のシフトとして観察されるため、ゼロ点を計測してから波高計測を開始するまでの時間間隔をできるだけ短くするようにした。しかし、これだけでは解消できないため、ゼロ点シフトの簡易修正法として、水槽全体に亘る長周期の定在波の波面を、船首が波高計を横切って（ここでゼロ点計測を行う。）から打ち切り点まで直線的な波面が保たれると仮定することにより、この上に Newman の修正波形¹¹⁾

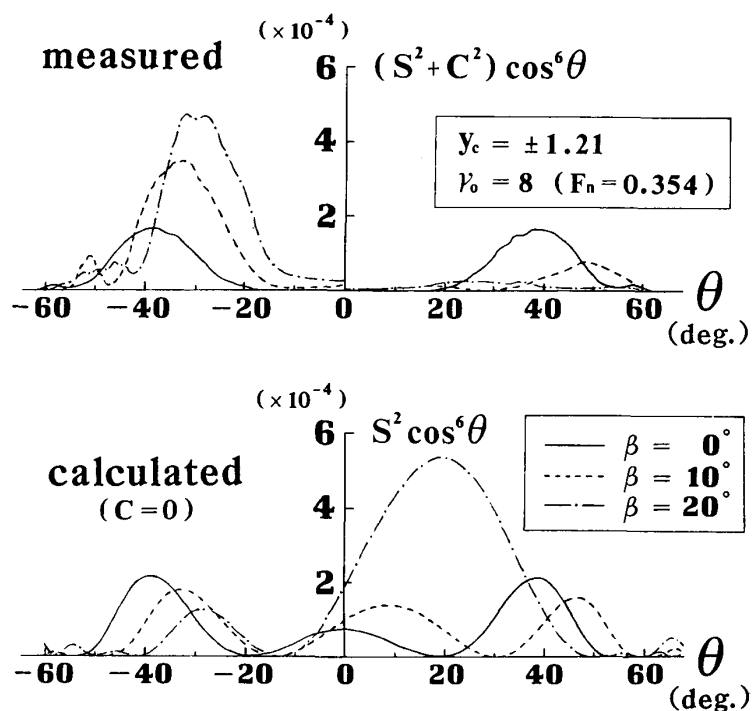


Fig. 8 Free Wave Spectrum for the Prolate Spheroid ($L/B=4$) in the Comparison between Measured Values by Wave Pattern Analysis and Calculated Values by Low Speed Theory.

が乗ったとして、右舷⁽⁺⁾、左舷⁽⁻⁾において、それぞれ

$$\zeta(x, \pm y_c) \approx A^\pm x + \zeta_c^\pm \frac{\cos \gamma_0 x}{\sqrt{x}} + \zeta_s^\pm \frac{\sin \gamma_0 x}{\sqrt{x}} \quad (30)$$

のような形で打ち切り点直前の一波長程度の波高データを最小自乗法で近似し、各項の係数 A^\pm , ζ_c^\pm , ζ_s^\pm を決定した後、得られた修正量 $A^\pm x$ を各々計測全域に亘る波高データから差し引いたものを、(15), (17)式に入力する最終的な縦切断波形として用いた。ここに、今回の実験では前節で述べたように、左右両舷での波高計測を同一航走時に行ったわけではないので、定在波の波面勾配 A^\pm は(30)式のように左右両舷で別個に設定する必要がある。このような水槽静振に対する簡易修正は、Fig. 8 に観られるように $\beta = 0^\circ$ の直進時の振幅関数における実験値と理論値が定性的にも定量的にも一致して得られているから、略々良好な結果を供するようではあるが、特に斜航時の造波横力を算定する時など、(20)式が示すように左右両舷での波高データの差が直接結果に反映される状況にあり、模型船が小さい限り水槽静振による解析精度の劣下は避けて通れない問題となる。以上述べてきたように、理論値・実験値ともに種々の問題を抱えていることでもあり、両者の比較・検討はこの辺りに留める。

さて、Fig. 8 の上図(実験値)を求める際、無限区間の Fourier 積分を行う必要があるが、これには3章の理論波形に対する解析と同様に、水槽側壁からの反射波によって乱されるまでの有効な波形データに対しては、それを区分的に1次式近似することにより Fillon の積分公式を用いて行い、後方の失われた波形については、(30)式の水槽静振に対する簡易修正法によって両舷での Newman 波形¹⁾の振幅 $\zeta_0^\pm \equiv \sqrt{(\zeta_c^\pm)^2 + (\zeta_s^\pm)^2}$ ならびに位相 $\varepsilon^\pm = \tan^{-1}(\zeta_s^\pm / \zeta_c^\pm)$ を決定し、Fresnel 積分によって半無限区間の積分値を評価した。ここに、 $\theta = 0$ 近傍での振幅関数には

$$C(\theta) + iS(\theta) \underset{\theta \rightarrow \pm 0}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\pi}} \cdot [\zeta_c^\mp - \zeta_s^\mp + i(\zeta_c^\mp + \zeta_s^\mp)] \quad (31)$$

が示すように有効波形データからの寄与はなく、スペクトラム表示した Fig. 8 のような場合、 $\theta = 0$ 近傍での値は

$$\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2 \underset{\theta \rightarrow \pm 0}{\sim} \frac{\gamma_0}{2\pi} \cdot \{\zeta_0^\mp\}^2 \quad (32)$$

のように、専ら両舷での仮想した Newman 波形の振幅 ζ_0^\mp に依存した形で得られ、 $\theta = +0$ の値には左舷の ζ_0^- が、 $\theta = -0$ の値には右舷の ζ_0^+ が関与することは、(15), (17)両式が教えるところである。ここに、流場が非対称な場合、右舷側⁽⁺⁾と左舷側⁽⁻⁾での打ち切り点以降の修正波形の振幅 ζ_0^+ と ζ_0^- は一般に異なるから、その差異によって Fig. 8 の上図に見られるように、振幅関数が $\theta = 0$ の対称点で不連続となる。ただ、この現象は、Fig. 5 や Fig. 7 における理論波形に対する解析結果にも若干ではあるが認められ、何も実測波形特有の計測誤差等に起因するものではなく、Newman-Sharma 法に内在する本質的な弱点が、非対称流場に対する解析例で浮き彫りにされたに過ぎない。この点に関しては、足達¹³⁾の打ち切り二次修正の考え方を含めて、今後の研究課題としたい。

なお、図には示さなかったが、Fig. 8 (上図)のスペクトラム表示した自乗和の前段階として C 波、S 波が各々得られており、理論的には剥離等を見れば楕円体が前後対称であるから、座標原点を Fig. 1 のように船体中央に取る限り Fig. 8 (下図)のように C 波は存在しないことになるが、実際の解析から得られた結果は直進・斜航を問わず Fig. 5 のようには両者が分離抽出され得ず、C 波と S 波が同程度に存在し且つ激しく変動して得られており、現実にはたとえ直進時でも、船体の排除効果による不均一流の影響や船尾の粘性影響等によって、素成波の位相特性が歪められて波が生成されることを示すものであろう。

5.3. 波形解析による造波横力曲線ならびに造波抵抗曲線

本節では、前節の Fig. 8 (上図)でその一例を示したように、実測波形の解析によって得られた振幅関数を(19),

(20)式に従って積分し、斜航時の模型船に働く造波横力ならびに造波抵抗を直接算定することを試みる。

Fig. 9 はそのようにして得られた波形横力 C_{Yw} ならびに波形抵抗 C_{Xw} をフルード数 F_n に対して置点したものであり、斜航角に対する依存性を調べるために $\beta = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ の3状態について示しているが、 $\beta = 0^\circ$ の直進時には流場の対称性から横力は生じず、図には現れていない。ここに、横軸の選び方については議論のあるところであり¹⁰⁾ 討論、細長比 ($\epsilon \equiv B/L$) にも依存し一概には言えないが¹⁰⁾ 回答、例えば斜航によって造波パターンに対する規準長が船長 L から $L \cos \beta$ に替ったと考えれば、その意味での相対的なフルード数は $\mathfrak{F}_n \equiv U_\infty / \sqrt{g \cdot L \cos \beta} = F_n / \sqrt{\cos \beta}$ となることから、横軸をこの \mathfrak{F}_n に取り直して Fig. 9 を再整理すると、横力 C_{Yw} については斜航角 β ごとの曲線の山谷がある程度等位相に納まりグラフは見易い形となるが、逆に抵抗 C_{Xw} については、 $\beta = 20^\circ$ の曲線が高速域で他の曲線と交差し $\beta = 0^\circ$ の直進時よりも低い抵抗値を与えるなど、必ずしも好解釈を供しないようであり、一方このような横力や抵抗のパラメタ依存性を論ずるには、船速 F_n に対しても斜航角 β に対しても実験点が少ないこともあって、取りあえずここでは(3)式で定義される通常のフルード数 F_n を横軸に採用し、この点についての詳細な検討は今後の研究課題としたい。

また、切断位置は船長に対する無次元値で $y_c = \pm 1.21$ であり、参考のため $\gamma_0 = 10$ に対してのみ中心線から約2倍離れた $y_c = \pm 2.06$ でも解析を行っているので、その結果も図中に併せて置点している。その差は量的には前節でも触れたように小さなものであるが、抵抗の場合は斜航角を問わず、その差こそあれ切断位置 y_c の増加によって造波抵抗値が増大しているのに対し、横力の場合は振幅関数の左右非対称性にも関係することから、 y_c の増加によって $\beta = 20^\circ$ の場合は抵抗と同様に絶対値が増加するのに対し、 $\beta = 10^\circ$ の場合など逆に絶対値が減少しており、この切断位置 y_c の変化が及ぼす影響についても、横力は抵抗に比べて複雑なようである。

注目すべきことは、Fig. 9 で波形横力 C_{Yw} の値がフルード数の全域に亘って負値として得られていることであり、剥離渦に基づく揚力とは逆向きに生じていることを意味し、著者らが先に示した低速造波理論に基づく漸近解⁹⁾ が示唆するところを裏書きしているように思われるが、今回の実験では流体力の計測を行っていないため、この波形解析による Fig. 9 一枚の結果から、造波横力に対する定量的予測や作用方向について即断を下すことには無理があり、今後より精密な実験的研究を進める必要がある。

斜航角 β に対する依存性については、横力 C_{Yw} は β の増加に伴って、高速域を除けばほぼ線型的にその絶対値が増加するという敏感な反応⁹⁾ を示すのに対し、抵抗 C_{Xw} は $\beta = 0$ の直進時からのズレはほぼ β^2 に比例する程度の比較的鈍い反応⁹⁾ しか示さない。一方、横力曲線はフルード数に対する山谷が目立ち、その位相が β の増加につれて若干低速側に移動する傾向¹⁰⁾ にあるため、 $\gamma_0 = 6$ の高速域では、 $\beta = 10^\circ$ の場合の横力が逆に $\beta = 20^\circ$ のそれよりも絶対値が大きく生じるような現象も起きてい

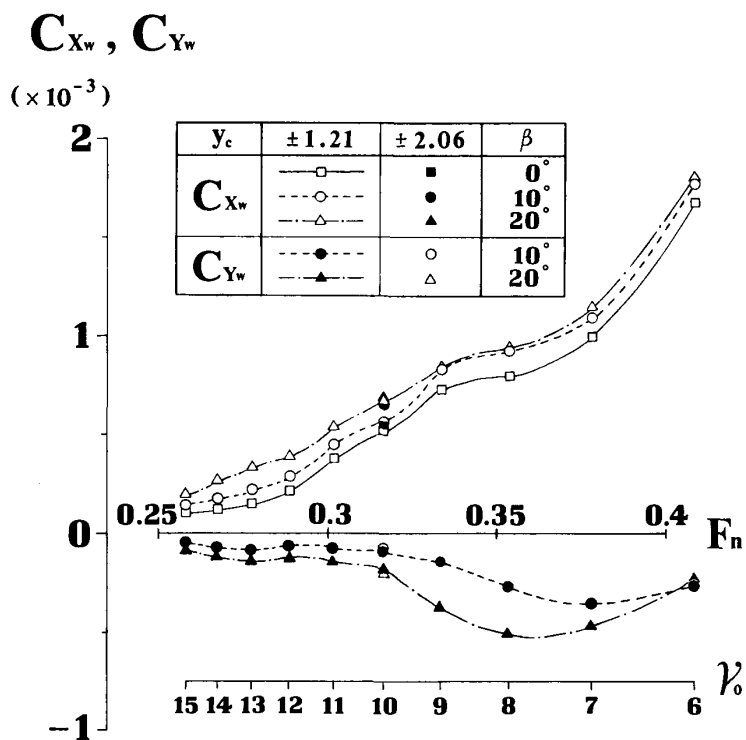


Fig. 9 Wave Making Lateral Force C_{Yw} and Resistance C_{Xw} for the Prolate Spheroid ($L/B=4$) with the Various Drift Angles β Derived from Wave Pattern Analysis at the Cut of $y_c = \pm 1.21$.

る。しかしながら、山谷を平均化した成分については横力 C_{yw} の絶対値は、フルード数 F_n に対して単調に且つ斜航角 β に関しては線型的に増加する傾向にある¹⁰⁾。それに比して抵抗曲線の場合、平均的な成分が支配的でありフルード数に対する山谷も横力ほど顕著には現れず、軽い凹凸を繰り返しながらフルード数と共に増大していくことになり、横力のように斜航角 β に関する大小関係の逆転も起こらない。ただ詳細を見ると、抵抗 C_{xw} の場合 $\beta = 10^\circ$ の曲線が、低速域では $\beta = 0^\circ$ と 10° の曲線のほぼ中間かむしろ直進時に近い所に位置し直進時からのズレは略々 β^2 程度の依存性を示すのに対し、高速域では逆に $\beta = 20^\circ$ の曲線に接近する傾向にあり、斜航角に対する依存性は、漸近解⁹⁾ が教えるようにフルード数に拘わらず様に β^2 程度とはなっていない。このことは抵抗曲線の場合も、横力曲線に見られたようには目立たないが、フルード数に対する山谷の位相が斜航角 β の増加につれて低速側に移動するという β に関する非線型効果¹⁰⁾ が生じていることが考えられ、先述した斜航角 β に対する相対的なフルード数 F_n とも関係すると思われるが、今回の実験では流体力の計測を行っていないこともあって、これ以上の議論は差し控えることにする。

6. 結 論

本論では、Newman-Sharma 法を非対称流場に拡張した理論を展開することにより、斜航する船の波に対する波形解析の手法を提案し、幾つかの例について検討を加えたところ、次のような結論を得た。

(i) 船の左右両舷で縦切断計測した二枚の波形記録を Fourier 変換することにより、(15), (17)式が示すように各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して、非対称流場における振幅関数が決定されることを明らかにした。また、開発した手法を没水した単一の斜軸 Doublet が生成する理論波形に適用し、その妥当性を確認した。

(ii) 解析結果に及ぼす波形表示式の偏角の影響について理論的に考察したところ、波形の段階で $|y_c| \gg 1$ 近似を施し生成波の放射条件を無視して導かれた(28), (29)式を用いた解析法は、造波抵抗値に限っては正しい結果を供給するが、流場の非対称性はもとより素成波の位相特性を含め、波動場の本質を捉えたものではないことが分かった。

(iii) 半没回転楕円体 ($L/B = 4$) を曳航水槽で斜航させ、両舷での二枚の実測波形から実際に造波横力ならびに造波抵抗を算定した結果、造波横力が揚力とは逆向きに生じていることが分かった。ただし、実験的には流体力の計測を行っていないこともあり、波形解析によって造波横力を精度良く分離計測する問題については、今後の研究課題とする。

謝 辞

本稿を閉じるに臨み、斜航船体に作用する造波横力を波形解析法によって算定することをお奨め下さった大阪大学工学部造船学科 松村清重講師に厚く御礼申し上げます。また、九州大学応用力学研究所船舶安全性部門 大楠 丹教授には、波形解析法に対する理論的な面から幾多の有益な御討論と終始温かい御激励を受けました。ここに記して、深く感謝の意を表します。更に、本論文を執筆するに当たり、種々御配慮戴いた九州大学応用力学研究所津屋崎海洋災害実験所々長 本地弘之教授ならびに同研究所海中作動力学部門 小寺山 亘教授に深く御礼申し上げます。また、水槽実験を実施するに際し多大な御協力を戴いた川崎重工業(株)岐阜工場 上原美基氏(当時：阪大院修士1年)ならびに大阪大学大学院修士課程 永井宏明氏(当時：阪大学部4年)に、心より御礼申し上げます。

最後に、本研究の当初におきまして、波形解析法に対する著者らの理解の誤りを御指摘下さり、本研究の方向付けを戴いた東京大学工学部船舶工学科教授 梶谷 尚先生に深甚なる感謝の意を捧げます。

参 考 文 献

- 1) Newman, J. N.: The Determination of Wave Resistance from Wave Measurements along a Parallel

- Cut, Proceedings of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Vol. I, Univ. of Michigan, Ann Arbor (昭38), p.351~379.
- 2) Sharma, S. D.: A Comparison of the Calculated and Measured Free-Wave Spectrum of an Inuid in Steady Motion, Proceedings of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Vol. I, Univ. of Michigan, Ann Arbor (昭38), p.201~270.
 - 3) Shor, S. W. W.: A Fourier Transform Method for Calculating Wave-Making Resistance from Wave Height on a Line Parallel to a Ship's Track, Proceedings of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Vol. II, Univ. of Michigan, Ann Arbor (昭38), p.599~616.
 - 4) Eggers, K. W. H., Sharma, S. D. & Ward, L. W.: An Assessment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking Characteristics of a Ship Form, Trans. of S. N. A. M. E., Vol. 75 (昭42), p.112~157.
 - 5) 池畑光尚, 野沢和男: 波形解析による造波抵抗の算定, 造船協会論文集, 第121号 (昭42), p. 62~71.
 - 6) 荻原誠功: Newman-Sharma の波形解析について — INUID 模型船による実験的調査 —, 関西造船協会誌, 第161号 (昭51), p. 89~98.
 - 7) 大楠 丹: 一定速度で前進し動揺する船の波形解析, 日本造船学会論文集, 第142号 (昭52), p. 36~44.
 - 8) 大楠 丹: 波形解析による船体横運動方程式の流体力係数の研究(その1), 日本造船学会論文集, 第149号 (昭56), p. 21~28.
 - 9) 堀 勉, 松村清重, 田中一朗: 斜航する船に働く造波横力について, 日本造船学会論文集, 第159号 (昭61), p. 9~22.
 - 10) 堀 勉, 田中一朗: 斜航する船に働く造波横力について — 斜航角に関する非線型影響 —, 西部造船会々報, 第75号 (昭63), p. 106~125.
 - 11) Wehausen, J. V. & Laitone, E. V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, Fluid Dynamics III, Springer-Verlag (昭35), p. 446~778.
 - 12) 宋 五生: 斜航船体に働く造波流体力とその近傍の波紋, 関西造船協会論文前刷集, 秋季造船三学会連合講演会 (昭63), p. 19~25.
 - 13) 足達宏之: Newman-Sharma 法における打ち切り二次修正, 第16回秋季船舶技術研究所発表会講演概要(昭45), p. 9~12.

付録 A $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$) 近似に対する検討

第4章では, 波形の段階で $y_c \gg 1$ ($\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$) 近似を行った場合について検討し, 結果として生ずる矛盾点を指摘したが, ここでは同様に放射条件は満足し得ないものの, Fig. 6に見られるように, 後流での波形近似度に優る $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$) 近似を施した波形表示式を用いた波形解析法の実体について検討する。

まず, Fourier 変換 $\mathcal{F}]_{x \gg 1}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}]_{x \gg 1} &\equiv \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-X_\infty}^{X_\infty} \zeta(x, y_c)]_{x \gg 1} \cdot e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \\ &= \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-X_\infty}^{X_\infty} e^{i\gamma_0 x \sec \phi} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [C(\theta) \cos \{\gamma_0(x + y_c \tan \theta) \sec \theta\} + S(\theta) \sin \{\gamma_0(x + y_c \tan \theta) \sec \theta\}] d\theta \end{aligned}$$

(ただし, $\phi > 0$) (A-1)

で定義することから出発する。この場合, 積分領域は, 過去に検討した二つの場合((5)式及び(24)式)とも異なり, Fig. 2 の全領域に亘る矩形領域となる。これは, (24)式で0であった θ の積分下限を $-\frac{\pi}{2}$ に変更したものに他ならないから, 積分順序を交換し x に関する積分を先に実行した結果は, (26)式の積分下限を $-\frac{\pi}{2}$ に置換した結果として得られ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}]_{x \gg 1} = & \frac{1}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\sec\theta + \sec\phi} \cdot e^{i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \sin\{\gamma_0 X_\infty(\sec\theta + \sec\phi)\} d\theta \\ & + \frac{1}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\sec\theta - \sec\phi} \cdot e^{-i\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta} \cdot \sin\{\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)\} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

となることから、左右両舷に伝播する素成波の干渉を考慮できることになる。ただし、この式は積分変数 x に対して近似を行って得られているため、常数 y_c に対して近似を施した(25)式の場合と異なって、放射条件を考慮した Fourier 変換式(7)における $x \gg 1$ の極限として捉えることはできない。ここに、第1項は分母が決してゼロにならないことから $X_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作によって消滅し、積分値は第2項から生ずることとなる。解析の便を図り第2章で行ったと同様に、振幅関数 C, S を(9)式のように対称成分 C_1, S_1 と反対称成分 C_2, S_2 に分解し、 θ の積分区間を半分に戻して θ の正值領域で表示すれば、

$$\mathfrak{F}]_{x \gg 1} = \frac{2}{\gamma_0} \lim_{X_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\begin{aligned} & \{C_1(\theta) + iS_1(\theta)\} \cdot \cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) \\ & - i\{C_2(\theta) + iS_2(\theta)\} \cdot \sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) \end{aligned} \right] \cdot \frac{\sin\{\gamma_0 X_\infty(\sec\theta - \sec\phi)\}}{\sec\theta - \sec\phi} d\theta \quad (\text{A-3})$$

と書くことができる。この積分を、付録(B-7)式に記す Riemann-Lebesgue の補助定理を用いて評価すると、分母がゼロとなる $\theta = \phi$ 近傍のみが積分値に寄与することとなり、 $\phi = 0$ の近傍を除外すれば、 $\mathfrak{F}]_{x \gg 1}$ の Fourier 変換値として

$$\mathfrak{F}]_{x \gg 1} = \frac{2\pi}{\gamma_0 \tan\phi \sec\phi} \cdot \left[\begin{aligned} & \{C_1(\phi) + iS_1(\phi)\} \cdot \cos(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) \\ & - i\{C_2(\phi) + iS_2(\phi)\} \cdot \sin(\gamma_0 y_c \tan\phi \sec\phi) \end{aligned} \right] \quad (\text{A-4})$$

を得、 y_c に関する振動項が $\sin(\dots), \cos(\dots)$ に分離された形で求まり、(13), (27)式のように $e^{\pm i\gamma_0 y_c \dots}$ の因数で括り得ず様相を異にする。したがって、(A-4)式を波形の Fourier 変換から振幅関数を求め得る形に書き改めるため、取りあえず両辺の実部と虚部を各々等置し、変数を $\phi \rightarrow \theta$ として記せば

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) \cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) + S_2(\theta) \sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_c(\theta, y_c) \tan\theta \sec\theta \\ S_1(\theta) \cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) - C_2(\theta) \sin(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_s(\theta, y_c) \tan\theta \sec\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

なる関係を得る。ここに、 $\mathfrak{F}_c(\theta, y_c), \mathfrak{F}_s(\theta, y_c)$ は、 $\mathfrak{F}]_{x \gg 1} \equiv \mathfrak{F}_c + i\mathfrak{F}_s$ のように(A-1)式の実部と虚部を意味し、具体的には、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_c(\theta, y_c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c)]_{x \gg 1} \cdot \cos(\gamma_0 x \sec\theta) dx \\ \mathfrak{F}_s(\theta, y_c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y_c)]_{x \gg 1} \cdot \sin(\gamma_0 x \sec\theta) dx \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

と定義され、 $x \gg 1$ 近似を施した波形の余弦変換と正弦変換を表すものである。

したがって、直進時のように流場が対称な場合には、(A-5)式において、 $C_2 = S_2 = 0$ と置くことにより、直ちに

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_c(\theta, y_c) \frac{\tan\theta \sec\theta}{\cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta)} \\ S_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_s(\theta, y_c) \frac{\tan\theta \sec\theta}{\cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

と求まり、形式的には振幅関数 C_1, S_1 を決定し得る形となる。しかし、実際には Shor の方法³⁾と同様、分母に $\cos(\gamma_0 y_c \tan\theta \sec\theta)$ なる因数を持つことから、これがゼロになる θ の所では C_1, S_1 は発散し、単純には連続的な

振幅関数を得ることができないという原理的な難点がある。一方、流場が何らかの理由で反対称な場合（例えば、(22)式で $\beta = \pi/2$ と置いて得られる y 方向に軸を持つ反対称 Doublet）には、逆に $C_1 = S_1 = 0$ とできるから

$$\left. \begin{aligned} C_2(\theta) &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_s(\theta, y_c) \frac{\tan \theta \sec \theta}{\sin(\gamma_0 y_c \tan \theta \sec \theta)} \\ S_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{F}_c(\theta, y_c) \frac{\tan \theta \sec \theta}{\sin(\gamma_0 y_c \tan \theta \sec \theta)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

となり、これも形式的には直ちに C_2, S_2 を求め得る形ではあるが、分母に $\sin(\gamma_0 y_c \tan \theta \sec \theta)$ なる因数を持つため、対称成分と同様な事情でゼロ割りの難点が生じる。このように、流場の対称性または反対称性が保証される時に限り、形式上は一枚の縦切断波形から振幅関数を導き得るから、片舷のみの計測で事足りる。

しかし、流場が非対称な場合、未知数が C_1, C_2, S_1, S_2 の4個あるにも拘わらず、(A-5)式で得られた関係式は2個であるから、一般的にこれを解くには $y_c^{(1)}, y_c^{(2)}$ における二枚の縦切断波形からの情報が必要となる。このとき(A-5)式からは2組4個の関係式が得られ、初めて振幅関数は解き得る形となる。実際、2組の連立方程式は簡単に解け、切断位置(1), (2)からの対応を各々の肩添字で示すと、対称成分 C_1, S_1 は

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \frac{\mathfrak{F}_c(\theta, y_c^{(1)}) \sin(\gamma_0 y_c^{(2)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_c(\theta, y_c^{(2)}) \sin(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta)}{\sin\{\gamma_0(y_c^{(2)} - y_c^{(1)}) \tan \theta \sec \theta\}} \\ S_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \frac{\mathfrak{F}_s(\theta, y_c^{(1)}) \sin(\gamma_0 y_c^{(2)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_s(\theta, y_c^{(2)}) \sin(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta)}{\sin\{\gamma_0(y_c^{(2)} - y_c^{(1)}) \tan \theta \sec \theta\}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-9})$$

のように、反対称成分 C_2, S_2 は

$$\left. \begin{aligned} C_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \frac{\mathfrak{F}_s(\theta, y_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(2)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_s(\theta, y_c^{(2)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta)}{\sin\{\gamma_0(y_c^{(2)} - y_c^{(1)}) \tan \theta \sec \theta\}} \\ S_2(\theta) &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \frac{\mathfrak{F}_c(\theta, y_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(2)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_c(\theta, y_c^{(2)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta)}{\sin\{\gamma_0(y_c^{(2)} - y_c^{(1)}) \tan \theta \sec \theta\}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-10})$$

のように決定され、通常の横切断法^{4)Eq.(29)}と類似の表示式となっている。しかし、これとて(A-7), (A-8)式と事情は同様で、たとえ波形計測を左右両舷で行うにしても、片舷の2断面で行うにしても、一般には分母の $\sin\{\dots\}$ がゼロになる θ で振幅関数が発散するという問題が残る。

A. 1 片舷2枚の計測波形を用いた解析法

本節では、(A-9), (A-10)両式が抱える難点の打開策として、 $y_c^{(2)} = 2y_c^{(1)}$ を満たすように片舷の2断面で計測を行う方法について考察する。このとき、幸運にも(A-9)式から得られる対称成分は、

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \cdot [2\mathfrak{F}_c(\theta, y_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_c(\theta, 2y_c^{(1)})] \\ S_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \tan \theta \sec \theta \cdot [2\mathfrak{F}_s(\theta, y_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 y_c^{(1)} \tan \theta \sec \theta) - \mathfrak{F}_s(\theta, 2y_c^{(1)})] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-11})$$

と変形できることから、前述のゼロ割りの難点は克服されており、(A-11)式を用いれば少なくとも連続な振幅関数が得られるはずである。しかし、(A-10)式に示される反対称成分については、この種の便法が見当たらないため、ここでは(A-11)式を用いて、対称流場の解析を行い、 $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$) 近似によって導かれる波形解析手法の適否について検討する。

計算の対象として、直進 Doublet (第3章(22)式において $\beta = 0$ と置いたもの) を選び、 $y_c^{(1)} = 1, y_c^{(2)} = 2$ での縦切断波形を用いて解析した結果を、Fig. A に示す。この場合、Fig. 7 に示す第4章で検討した $y_c \gg 1$ ($\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$) 近似に対する結果とは異なり、図に見られるように C 波 (実線) は S 波 (破線) に比して小さく得られており、Doublet には元来 C 波は存在しないという位相特性については概ね再現できている。しかし、解析結果の絶対値に

については、 $-2\sqrt{S^2+C^2}$ (一点鎖線) が元々の理論値 (太線) とほぼ一致するという不思議な状況にあり、実際に得られた結果は理論値の半分に過ぎず、振幅関数の再現性という意味からは、この方法は全く無力と言わざるを得ない。

このことは、 $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$) 近似の場合、後流での波形近似度は充分である (Fig. 6) にも拘わらず、上流にも波が残るような表式になっており、偏角 θ を固定して x 方向に $-\infty$ から $+\infty$ まで Fourier 変換を施すことは物理的には放射条件の壁を犯して積分することになるため Fig. A に示すような不満足な結果になったもので、このことから波形解析法の算式を導出するに際し、放射条件すなわち偏角 θ を考慮することの重要性がうかがえる。したがって、これを無視して Fourier 積分を行った二例の場合、数学的には積分領域の取り方に問題が生じ、たとえ直進時の対称条件を課したにせよ、まず第4章で検討した $y_c \gg 1$ 近似の場合、振幅関数の絶対値については正しく解析するものの位相特性については再現し得ず、逆に、ここで検討した $x \gg 1$ 近似の場合、素成波の位相特性については解析し得るものの絶対値を半分に推定するなど、ともに問題点を残す結果となったものである。

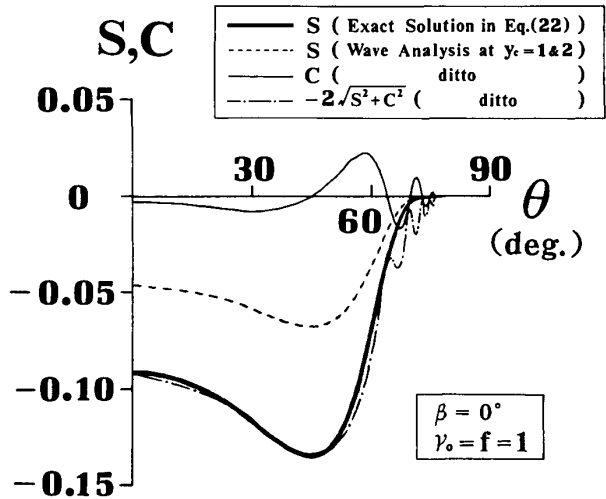


Fig. A Wave Amplitude Function of a Point Doublet with Straight Axis Analyzed by Eq. (A-11) in the Case of $x \gg 1$ ($\theta \rightarrow 0$).

付録B Riemann-Lebesgue の補助定理

本論の積分演算の途上、度々登場する

$$\mathfrak{D}_1 \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRg(\xi)}}{g(\xi)} d\xi \quad (\text{B-1})$$

なる形の積分を評価することを考える。今、積分範囲内に $g(\xi) = 0$ を満たす単根 $\xi = x$ が存在するとき、積分値 \mathfrak{D}_1 には分母がゼロとなる $\xi = x$ 近傍のみが寄与することになり、 $F(\xi)$, $g(\xi)$ を各々 $\xi = x$ 周りに Taylor 展開して記せば

$$\mathfrak{D}_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{F(x) + \dots\} \cdot \frac{e^{\pm iR\{g'(x) \cdot (\xi-x) + \dots\}}}{g'(x) \cdot (\xi-x) + \dots} d\xi \quad (\text{B-2})$$

となる。ここに、 $g'(x)$ は $g(\xi)$ の $\xi = x$ における微係数を表し、当然 $g'(x) \neq 0$ が必要条件となる。上式の展開の第1項のみ取り、 $t = Rg'(x) \cdot (\xi-x)$ によって変数を ξ から t に変換すれば

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{F(x)}{g'(x)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-Rg'(x)}^{Rg'(x)} \left\{ \frac{\cos t}{t} \pm i \frac{\sin t}{t} \right\} dt \quad (\text{B-3})$$

と変形できる。ここに、第1項は $t = 0$ で対数的に発散するが、積分値として Cauchy の主値を採用すれば反対称性から消滅する。そこで、 ε を $\frac{1}{Rg'(x)} \ll \varepsilon \ll 1$ を満たすように、例えば $\varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ と選び、積分区間を半分に折り返せば、 \mathfrak{D}_1 は

$$\mathfrak{D}_1 = \pm 2i \frac{F(x)}{g'(x)} \text{sgn}[g'(x)] \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{B-4})$$

と計算すれば良いことになる。したがって、Fresnel の積分として $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ であることが知られているから、結局

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRg(\xi)}}{g(\xi)} d\xi &= \pm i\pi \frac{F(x)}{|g'(x)|} \\ \text{ただし, } g(x) &= 0, g'(x) \neq 0 \quad (a < x < b) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B-5})$$

なる関係式を得る。これが、Riemann-Lebesgue の補助定理と呼ばれるものである。

また、 $F(\xi)$ 、 $g(\xi)$ が実関数であるとき、(B-5) 式の両辺をそれぞれ実部と虚部に分解して

$$\int_a^b F(\xi) \frac{\cos \{Rg(\xi)\}}{g(\xi)} d\xi \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} 0 \quad (\text{B-6})$$

$$\int_a^b F(\xi) \frac{\sin \{Rg(\xi)\}}{g(\xi)} d\xi \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \pi \frac{F(x)}{|g'(x)|} \quad (\text{B-7})$$

と書くこともできる。

付録C 拡張された Riemann-Lebesgue の定理

第2章の積分演算に必要な

$$\mathfrak{D}_2 \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRh(\xi)}}{g(\xi)} d\xi \quad (\text{C-1})$$

なる形の積分について考える。 \mathfrak{D}_2 の評価手順は、付録Bに示す \mathfrak{D}_1 と類似の部分も多いので、簡単に記すことにする。積分値には、 $g(\xi) = 0$ の単根 $\xi = x$ 近傍のみが寄与するから、 $F(\xi)$ 、 $g(\xi)$ 、 $h(\xi)$ は各々その周りに展開でき、

$$\mathfrak{D}_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{F(x) + \dots\} \cdot \frac{e^{\pm iR\{h(x)+h'(x)\cdot(\xi-x)+\dots\}}}{g'(x)\cdot(\xi-x)+\dots} d\xi \quad (\text{C-2})$$

となる。ここに、位相関数 $h(\xi)$ の展開のみ第2項まで取り、 $t = Rh'(x)\cdot(\xi-x)$ と置いて変数変換を行うことにより、

$$\mathfrak{D}_2 = \frac{F(x)}{g'(x)} e^{\pm iRh(x)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R\varepsilon h'(x)}^{R\varepsilon h'(x)} \left\{ \frac{\cos t}{t} \pm i \frac{\sin t}{t} \right\} dt \quad (\text{C-3})$$

を得る。ここに、第1項に対して Cauchy の主値を取り、 ε を $\frac{1}{Rh'(x)} \ll \varepsilon \ll 1$ を満たすように選び、対称・反対称性を考慮すれば、

$$\mathfrak{D}_2 = \pm 2i \frac{F(x)}{g'(x)} e^{\pm iRh(x)} \operatorname{sgn}[h'(x)] \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt \quad (\text{C-4})$$

となる。したがって

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRh(\xi)}}{g(\xi)} d\xi &= \pm i\pi \frac{F(x)}{g'(x)} e^{\pm iRh(x)} \operatorname{sgn}[h'(x)] \\ \text{ただし, } g(x) &= 0, g'(x) \neq 0 \quad (a < x < b) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C-5})$$

なる関係式を得、これが拡張された Riemann-Lebesgue の定理として知られるものである。

また、 $F(\xi)$ 、 $g(\xi)$ 、 $h(\xi)$ が全て実関数であるとして、(C-5) 式の両辺を実部と虚部に分解して記せば、

$$\int_a^b F(\xi) \frac{\cos \{Rh(\xi)\}}{g(\xi)} d\xi \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} -\pi \frac{F(x)}{g'(x)} \sin \{Rh(x)\} \cdot \operatorname{sgn}[h'(x)] \quad (\text{C-6})$$

$$\int_a^b F(\xi) \frac{\sin \{Rh(\xi)\}}{g(\xi)} d\xi \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \pi \frac{F(x)}{g'(x)} \cos \{Rh(x)\} \cdot \text{sgn}[h'(x)] \quad (\text{C-7})$$

となる。
