

## 斜航する船の波に対する横切断波形解析法について\*

—1枚の横切断波形を用いたFourier変換法の提案—

正会員 堀 勉\*\*

On the Wave Pattern Analysis by Means of Transverse Cut Method  
for Asymmetrical Ship Waves\*—A Proposition of the Fourier Transform Method  
by Means of a Sheet of Transverse Wave Profile—

By Tsutomu HORI\*\* (Member)

In this paper, a new transverse cut method in the type of Fourier transform is proposed on the field of wave pattern analysis. If this new method is applied for the analysis of asymmetrical ship waves, the amplitude functions of free wave is able to determine by use of only a sheet of transverse wave profile. That is to say, the amplitude function of elementary waves propagated toward the opposite side of each measured side are obtained in asymmetrical wavy flow field, when we transform a sheet of wave profile measured along the transverse cut perpendicular to ship's course from centre line to infinity sideways both port and starboard sides by means of Fourier integral.

The present method of asymmetrical wave pattern analysis is applied to theoretical wave pattern generated by a submerged point doublet with oblique axis in order to confirm the reasonableness of present method. The effects of radiation condition of ship waves on the equation of wave pattern analysis are also mathematically studied in the case that the longitudinal position of transverse cut goes to infinity rearwards. Furthermore, the relationship between the newly proposed method and the ordinary method is theoretically showed on the transverse cutting wave pattern analysis in the form of Fourier transform and is numerically illustrated on the base of analysis for theoretical wave pattern generated by a submerged point source.

## 1. 序 論

船の造った波を計測して造波抵抗を直接算定するための波形解析の手法として、現在最も一般的に用いられているのは、縦切断計測した波形をFourier変換することによって自由波の振幅関数を直ちに決定し得るNewman<sup>1)</sup>-Sharma<sup>2)</sup>法であろう。恐らく計測ならびに解析の容易さにおいて、この手法に優るものはないと考えられ、著者らもこのような観点からNewman

-Sharma法を非対称流場に拡張する試みを行ってきた<sup>3)</sup>。一方、同じFourier変換型の手法を採用するものの、船の進行方向に対して直角方向に横切断計測した波形を解析する方法が、Eggers<sup>4)</sup>やSharma<sup>2)</sup>によって縦切断法と同時期に提案されている。その後、この横切断法を用いても縦切断法を用いても、ほぼ一定の造波抵抗値が得られる事が確認されている<sup>5)</sup>にも拘わらず、横切断法が縦切断方式を用いたNewman-Sharma法に比べて水槽試験に普及しなかったのは、波高計を走行中の曳航台車上で横方向に移動させながら記録を取り込まねばならないという単に計測技術上の困難さと時間的な制約のみに起因するわけではなく、

\*平成元年5月25日 関西造船協会 春季講演会  
において講演

\*\*九州大学 応用力学研究所 津屋崎海洋災害実験所

Fourier変換型の横切断法の算式が縦切断法のそれのように完備したものではないため、波形の縦方向の勾配等ほぼ実用上計測困難なデータを用いない限り、2枚の横切断波形を必要とし、しかも振幅関数を求めるに際し素成波の伝播方向によっては発散する因子を有するという本質的な問題を抱えていることにあると考えられる<sup>2),4),5)</sup>。

したがって、このような解析理論上の弱点を克服することができれば、横切断法にも新しい局面が開かれることが予想され、本論文の主眼も正にこの点にある。すなわち、横切断法によっても縦切断法と同様に、1枚の計測波形の単純なFourier変換から自由波の振幅関数を決定し得るとすれば、たとえ計測が縦切断法に比して面倒ではあっても、一方において種々の利点も持ち併せている。つまり、縦切断法が無限後流までのFourier積分を必要とするため、水槽壁からの反射波によって失われた打ち切り点より後方の波形をNewman修正<sup>3)</sup>によって仮想しなければならないのに対し、横切断法の場合も形式的には無限側方までのFourier変換を要求するけれども、実際の船の波は概ねKelvin波の頂角である $19^{\circ}28'$ 内に納まって生成されるため、計測波形のデータは有限な範囲内のみ存在するから、反射波によって乱される前の横切断位置で計測を行えば、縦切断法に見られるような修正は不要となる。ただ、横切断法の場合、波形記録が船体後方の粘性伴流領域を横切ることになるため、造波に対する粘性影響が混入して誤差の原因となることが考えられるが、これとても見方を変えれば、縦切断法がその性質上、船の波に対する粘性影響を殆ど受けないことを考え併せると、両者が同程度のレベルで波形を解析し得るとするならば、その差から船の波(更には造波抵抗や造波横力)に対する粘性影響を振幅関数レベルで抽出することも将来的には可能になると考えられ、実験的にも理論的にも興味あるところである。

本論文では上述の状況に鑑み、1枚の横切断波形をFourier変換することによって自由波の振幅関数を決定し得る波形解析の手法を提案する。この方法は、通常のNewman-Sharma法における切断方向を縦から横に転換した形に対応しており、計測された横切断波形を船の中心線を境に左右両舷で別個に半無限区間に亘ってFourier変換することによって、各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して非対称流場での振幅関数を決定し得るものである。次に、開発した手法を没水した単一の斜軸Doubletが生成する理論波形に適用し、その妥当性を検証するとともに、波形を解析する算式を導くに当り生成波の放射条件を考慮することは、横切断法の場合、縦切断法<sup>3)</sup>とは異なり最終結果には影響を及ぼさないことも明らかにする。更に、従来の横切

断法との関連についても考察を加え、Point Sourceが生成する理論波形に対する解析例から、両者の比較・検討を行う。ただし、実験的には実測波形に対する解析を行っていないことや有限な水槽幅に対する問題については論じていないなど不十分な部分も多いが、ここに横切断波形解析法における新しいFourier変換法の提案という意味で御報告し、諸賢の御批判を仰ぐ次第である。

## 2. 波形解析理論の展開

船が静止水面上を定常航走する時に造る波について考える。座標系はFig.1に示すように、静止水面上に

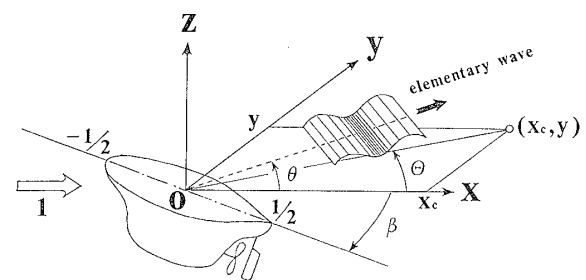


Fig.1 Cartesian coordinate system and definitions of some basic quantities in the problem of asymmetrical ship waves

座標原点oを配し、一様な流れ方向にx軸、右舷方向にy軸、これらと右手系で直交するよう鉛直上向きにz軸を取ったデカルト座標とする。また、物理量は全て船長L、一様流速 $U_{\infty}$ 、流体密度 $\rho$ を規準に無次元化して扱うものとする。したがって、自由表面を有する大きさ1の流れの中に、長さ1の船体が $\beta$ だけ斜航角を付けて置かれているとして問題を設定することになる。

### 2.1 波形の表示式

定常斜航する船によって生成される波は、造波に及ぼす三次元剝離等の粘性影響を無視し、Havelock's Wave Source Potentialの名で知られる線型自由表面条件を満足する造波グリーン関数を用いた解析を行う限り直進時と同様に、船体表面に分布するPoint Sourceから生成される波(その遠方での漸近形を附録(B-3)式に示す。)が重畳されたものとして捉えることが出来る。従って、遠方( $\sqrt{x^2+y^2} \gg 1$ )での波紋 $\zeta(x,y)$ について考えると、局所攪乱波の影響が消えることから、 $y > 0$ なる右舷側では、

$$\zeta(x,y) \sqrt{x^2+y^2} \gg 1 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) \cos(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta) + S(\theta) \sin(\gamma_0 \omega \sec^2 \theta)\} d\theta$$

(ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ ) .....(1)

のように、座標原点から生成される後続自由波の形で表現でき、物理的には  $\theta$  方向に伝播する二次元的な素成波が合成された結果として得られている。ここに、波源は船体表面や船体近傍の水面上に拡がりを持って分布していることになるが、この影響は振幅関数  $C(\theta), S(\theta)$  の中に取り込まれており、斜航時の非対称流場に対する  $C, S$  は流場の対称性を前提とした直進時のように偶関数とはならない。また、積分下限に現れる  $\theta$  は、

$$\theta \equiv \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

と定義したものであり、Fig.1に示すように波紋の標点  $(x, y)$  の座標原点  $o$  に対する偏角を意味し、(1)式のように  $y > 0$  なる右舷側に対しては、 $0 \leq \theta \leq \pi$  間に位置することから、これを考慮することにより船の前方 ( $\theta \rightarrow \pi$ ) には波が生じないという生成波の放射条件を自動的に満足させ得ることになる。ただし、本来この偏角  $\theta$  は実際の波源の位置に対応して測られるべきものであるが、前もって特異点分布が知れているわけではないため、標点  $(x, y)$  が原点  $o$  から離れた遠方を考えていることと、(1)式の  $\theta$  に関する積分範囲の近似に対する波高  $\zeta$  の反応が鈍感であることから、偏角  $\theta$  に対しては波源の位置を座標原点  $o$  に集約して測っている。このように偏角  $\theta$  を近似することは、局部攪乱波を無視するという近似のレベルにおいては妥当なものであり、一方において、この種の近似を行うことによって初めて、たとえ特異点分布が未知であっても波形解析によって振幅関数  $C(\theta), S(\theta)$  が求められることになる。なお、(1)式中の  $\omega$  と  $\gamma_0$  は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \omega &\equiv x \cos \theta + y \sin \theta \\ \gamma_0 &\equiv \frac{gL}{U_\infty^2} = \frac{1}{F_n^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

と定義したもので、 $\omega$  は原点  $o$  から標点  $(x, y)$  までの素成波の伝播距離、 $\gamma_0$  は無次元波数であり、重力加速度を  $g$ 、Froude 数を  $F_n$  と記したものである。

2.2 新しい横切断波形解析法

本論では、 $x = x_c$  の断面で横切断計測した(1)式の波形  $\zeta(x_c, y)$  を、通常のように無限区間に亘ってFourier変換するのではなく、

$$\mathfrak{F} \equiv \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{Y_\infty} \zeta(x_c, y) e^{i\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \quad \dots\dots(4)$$

(ただし、 $\phi > 0$ )

のように、中心線 ( $x$  軸) から右舷遠方まで、 $y$  方向に

半無限区間に亘ってFourier変換することを考える。ここに、Fourier変換の引数  $\phi$  は取りあえず正であるとして以下の議論を進める。

このとき、 $\mathfrak{F}$  に対する算式は、線型造波理論に従う(1)式の理論波形を(4)式に代入すれば、

$$\mathfrak{F} = \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{Y_\infty} e^{i\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \int_{-\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\frac{y}{x_c})}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \begin{aligned} &C(\theta) \cos \{r_0(x_c + y \tan \theta) \sec \theta\} \\ &+ S(\theta) \sin \{r_0(x_c + y \tan \theta) \sec \theta\} \end{aligned} \right] d\theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

となり、以下の積分演算の便を図って  $\sin \{ \dots \}$ 、 $\cos \{ \dots \}$  関数を複素表示に書き改めて、整理すれば

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{Y_\infty} dy \int_{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{y})}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \begin{aligned} &\{C(\theta) - iS(\theta)\} \cdot e^{i\gamma_0(x_c \sec \theta + y(\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi))} \\ &+ \{C(\theta) + iS(\theta)\} \cdot e^{-i\gamma_0(x_c \sec \theta + y(\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi))} \end{aligned} \right] d\theta \quad \dots\dots\dots(6)$$

のように書くことができる。このときの積分領域は、 $\theta$  の積分区間に偏角  $\theta$  の影響が反映されて、Fig.2に

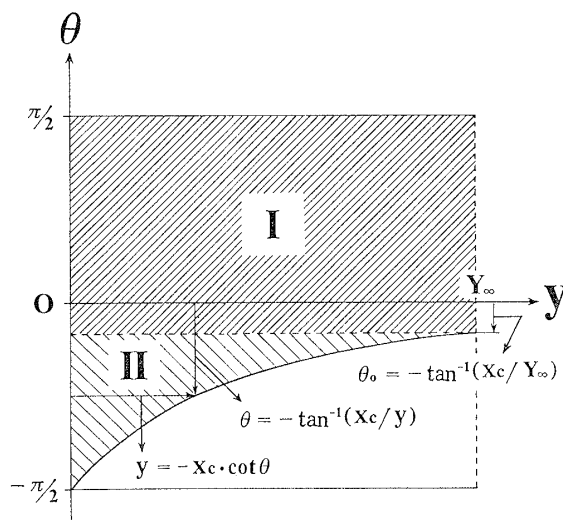


Fig.2 Integral domain on the Fourier transform of transverse wave profile in  $y$ -direction

斜線で示す通りである。したがって、 $\theta$  と  $y$  に関する重複積分の順序を交換し、 $y$  に関する積分を先に実行するためには、積分領域を  $\theta_0 = -\tan^{-1}(x_c/Y_\infty)$  を境に、上側の矩形形状の領域 I ( $-\tan^{-1}(x_c/Y_\infty) \leq \theta \leq \pi/2$ ) と逆斜線で示す下側の曲線状の領域 II ( $-\pi/2 \leq \theta \leq -\tan^{-1}(x_c/Y_\infty)$ ) に分割して、

$$\underbrace{\int_{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{Y_\infty} [\dots] dy}_{\text{領域 I}} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})} d\theta \int_0^{-x_c \cot \theta} [\dots] dy}_{\text{領域 II}} \dots (7)$$

のように積分を行う必要がある。

実際、Fourier変換の式(6)を(7)式に従いyに関する積分を先に実行して、 $\mathfrak{F}$ を書き下すと、

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi} \\ &\times [e^{ir_0(x_c \sec \theta + Y_\infty(\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi))} - e^{ir_0 x_c \sec \theta}] d\theta \\ &- \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} \\ &\times [e^{-ir_0(x_c \sec \theta + Y_\infty(\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi))} - e^{-ir_0 x_c \sec \theta}] d\theta \\ &+ \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi} \\ &\times \{e^{-ir_0 x_c \cot \theta \tan \phi \sec \phi} - e^{ir_0 x_c \sec \theta}\} d\theta \\ &- \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\tan^{-1}(\frac{x_c}{Y_\infty})} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} \\ &\times \{e^{-ir_0 x_c \cot \theta \tan \phi \sec \phi} - e^{-ir_0 x_c \sec \theta}\} d\theta \\ &\equiv \mathfrak{F}^{(1)} + \mathfrak{F}^{(2)} + \mathfrak{F}^{(3)} + \mathfrak{F}^{(4)} \dots (8) \end{aligned}$$

となり、各項を順に肩添字で示したものである。ここに、 $\mathfrak{F}^{(1)}$ と $\mathfrak{F}^{(2)}$ は領域Iについて得られたものであり、 $\mathfrak{F}^{(3)}$ と $\mathfrak{F}^{(4)}$ は領域IIからの寄与である。ただ、今の場合Fourier変換の値として $Y_\infty \rightarrow \infty$ なる極限值を知れば充分であり、横切断位置 $x_c$ は有限であって $Y_\infty \gg x_c$ であるから、領域Iと領域IIの境界線は $\theta_0 = -\tan^{-1}(x_c/Y_\infty) \rightarrow 0$ となり、(8)式における $\theta$ の積分区間も簡単になって、領域Iが $\theta$ の正側に、領域IIが $\theta$ の負側に対応することになる。従って、 $\mathfrak{F}^{(1)}$ と $\mathfrak{F}^{(2)}$ は分母が決してゼロにならないことから、 $\mathfrak{F}^{(1)}$ の大括弧内の第1項は $Y_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作から消失し、また $\mathfrak{F}^{(1)}$ の第2項及び $\mathfrak{F}^{(4)}$ は横切断位置が充分後方であるとして $x_c \gg 1$ を仮定すれば漸近的に消滅するから、 $x_c \gg 1$ に対する漸近値で論ずる限り、以後 $\mathfrak{F}^{(2)}$ 及び $\mathfrak{F}^{(3)}$ についてのみ考えれば良いことになり、以下の解析の便を図って $\mathfrak{F}^{(3)}$ の積分区間を $\theta$ の正值領域に折り返して記述すれば、結局(4)式のFourier変換値 $\mathfrak{F}$ を算定する問題が、

$$\mathfrak{F} \underset{x_c \gg 1}{\sim} \mathfrak{F}^{(2)} + \mathfrak{F}^{(3)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2r_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} \\ &\times [e^{-ir_0(x_c \sec \theta + Y_\infty(\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi))} - e^{-ir_0 x_c \sec \theta}] d\theta \\ &+ \frac{i}{2r_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(-\theta) - iS(-\theta)}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} \\ &\times \{e^{ir_0 x_c \cot \theta \tan \phi \sec \phi} - e^{ir_0 x_c \sec \theta}\} d\theta \dots (9) \end{aligned}$$

のような $\theta$ の単積分を評価する問題に帰着される。ここに、 $\mathfrak{F}^{(2)}$ の大括弧内の第1項は $Y_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作により、 $\mathfrak{F}^{(2)}$ の第2項及び $\mathfrak{F}^{(3)}$ は $x_c \gg 1$ の前提によって、共に被積分関数が激しく変動するため、分母がゼロとなる $\theta = \phi (> 0)$ の近傍のみが積分値に寄与することになり、Fourier変換 $\mathfrak{F}$ を知るには、結局

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &\underset{x_c \gg 1}{\sim} \frac{i}{2r_0} \cdot \{C(\phi) + iS(\phi)\} \\ &\times \left[ \begin{aligned} &e^{-ir_0 x_c \sec \phi} \cdot \lim_{r_0 Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{\phi-\epsilon}^{\phi+\epsilon} \frac{e^{-ir_0 Y_\infty(\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi)}}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} d\theta \\ &- \lim_{r_0 x_c \gg 1} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{e^{-ir_0 x_c \sec \theta}}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} d\theta \end{aligned} \right] \\ &+ \frac{i}{2r_0} \cdot \{C(-\phi) - iS(-\phi)\} \\ &\times \left[ \begin{aligned} &\lim_{r_0 x_c \gg 1} \int_{\phi-\nu}^{\phi+\nu} \frac{e^{ir_0 x_c \cot \theta \tan \phi \sec \phi}}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} d\theta \\ &- \lim_{r_0 x_c \gg 1} \int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} \frac{e^{ir_0 x_c \sec \theta}}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} d\theta \end{aligned} \right] \dots (10) \end{aligned}$$

のような特異積分の評価を要求される。ここに、積分区間に現れる微小量の $\epsilon, \delta, \nu$ をそれぞれ

$$\frac{1}{r_0 Y_\infty \sec \phi (\sec^2 \phi + \tan^2 \phi)} \ll \epsilon \ll 1,$$

$$\frac{1}{r_0 x_c \tan \phi \sec \phi} \ll \delta \ll 1, \quad \frac{1}{r_0 x_c \cot \phi \sec^3 \phi} \ll \nu \ll 1$$

なる関係を満足するように選び、 $\mathfrak{F}^{(2)}$ の第1項に $r_0 Y_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作からRiemann-Lebesgueの補助定理<sup>3)付録B</sup>

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRg(\xi)}}{g(\xi)} d\xi &= \pm i\pi \frac{F(x)}{|g'(x)|} \\ \text{ただし、} g(x) &= 0, g'(x) \neq 0 (a < x < b) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

を、 $\mathfrak{F}^{(2)}$ の第2項ならびに $\mathfrak{F}^{(3)}$ に $r_0 x_c \gg 1$ を仮定して、拡張されたRiemann-Lebesgueの定理<sup>3)付録C</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^b F(\xi) \frac{e^{\pm iRh(\xi)}}{g(\xi)} d\xi \\ = \pm i\pi \frac{F(x)}{g'(x)} e^{\pm iRh(x)} \cdot \text{sgn}[h'(x)] \end{aligned}$$

ただし,  $g(x)=0, g'(x) \neq 0, h'(x) \neq 0$

$$(a < x < b) \dots\dots\dots(12)$$

を適用すれば, (12)式で言う  $h'(x)$ に当る  $\tan \phi \sec \phi$  がゼロとなる  $\phi = 0$  近傍を除外して, 積分値  $\mathfrak{F}$  は  $\phi$  の正值に対して漸近的に,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{x_c \gg 1} &\sim \frac{i\pi}{2r_0} \cdot \frac{C(\phi) + iS(\phi)}{\sec \phi (\sec^2 \phi + \tan^2 \phi)} \cdot \\ &\times [-ie^{-ir_0 x_c \sec \phi} - \{-ie^{-ir_0 x_c \sec \phi} \cdot \text{sgn}(\tan \phi \sec \phi)\}] \\ &+ \frac{i\pi}{2r_0} \cdot \frac{C(-\phi) - iS(-\phi)}{\sec \phi (\sec^2 \phi + \tan^2 \phi)} \\ &\times \begin{bmatrix} ie^{ir_0 x_c \sec \phi} \cdot \text{sgn}(-\cot \phi \sec^3 \phi) \\ -ie^{ir_0 x_c \sec \phi} \cdot \text{sgn}(\tan \phi \sec \phi) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

のように計算され, 結局領域 I から生じた  $\mathfrak{F}^{(2)}$  に相当する第1項も大括弧内の両項で相殺し, 最終的に積分値に寄与するのは領域 II から生じた第2項の  $\mathfrak{F}^{(3)}$  のみということになるから, (4)式で定義される横切断波形に関する  $y$  方向の Fourier 変換  $\mathfrak{F}$  として,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{x_c \gg 1} &\sim \mathfrak{F}^{(3)} \\ &\sim \frac{\pi}{r_0} \cdot \frac{e^{ir_0 x_c \sec \phi}}{\sec \phi (2 \sec^2 \phi - 1)} \cdot \{C(-\phi) - iS(-\phi)\} \\ &\dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

を得ることができる. 従って, (14)式の変数を  $\phi \rightarrow \theta$  として置換することにより, 右舷側 ( $y > 0$ ) の横切断波形を  $\theta > 0$  として Fourier 変換した結果と, 素成波の振幅関数  $C(\theta), S(\theta)$  との間に

$$\begin{aligned} &C(-\theta) - iS(-\theta)_{x_c \gg 1} \frac{r_0}{\pi} \sec \theta (2 \sec^2 \theta - 1) \cdot \\ &\times e^{-ir_0 x_c \sec \theta} \cdot \int_0^\infty \zeta(x_c, y) e^{ir_0 y \tan \theta \sec \theta} dy \\ &(\text{ただし, } y > 0, \theta > 0) \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

なる関係式を得る. この(15)式は, 左辺の  $C, S$  に関する引数が  $-\theta$  として得られていることから Fig. 3 に図示するように, 1枚の横切断計測した波形を  $y$  方向に中心線から右舷遠方まで半無限区間に亘って Fourier 変換することにより, 直ちに反対舷の左舷側 ( $-\theta < 0$ ) に伝播する素成波の振幅関数が決定されることを教えている. 従って, 船舶直進時のように流場が左右対称な時には, 片舷での横切断波形が1枚あれば充分であり, (15)式を用いて得られた左舷側の振幅関数を  $\theta = 0$  を中心に右舷側に折り返せば, 全流場の

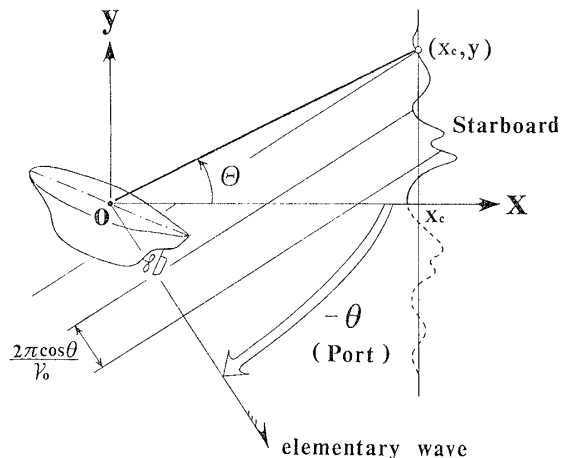


Fig. 3 Relationship between amplitude function of elementary waves and measured wave profile along the transverse section (illustration of Eq. (15))

振幅関数が得られることになる.

一方, 船舶斜航時のように流場が左右非対称な時には, 左右両舷に亘る1枚の横切断波形が必要である. 従って, 左舷側 ( $y < 0$ ) での横切断波形

$$\begin{aligned} \zeta(x_c, y)_{\sqrt{x_c^2 + y^2} \gg 1} &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta} \{C(\theta) \cos(r_0 \vartheta \sec^2 \theta) \\ &+ S(\theta) \sin(r_0 \vartheta \sec^2 \theta)\} d\theta \\ &(\text{ただし, } -\pi \leq \theta \leq 0) \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

に, (4)式とは逆に Fourier 変換の引数を負として,  $y$  方向に左舷遠方から中心線 ( $x$  軸) まで同様に半無限区間に亘って Fourier 変換を施し, (15)式の導出過程を左右反転させて辿っていくと, 最終的に

$$\begin{aligned} &C(-\theta) - iS(-\theta)_{x_c \gg 1} \frac{r_0}{\pi} \sec \theta (2 \sec^2 \theta - 1) \cdot \\ &\times e^{-ir_0 x_c \sec \theta} \cdot \int_{-\infty}^0 \zeta(x_c, y) e^{ir_0 y \tan \theta \sec \theta} dy \\ &(\text{ただし, } y < 0, \theta < 0) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

なる関係が導かれることから, (15)式の解析には不要であった左舷側の波形を Fourier 変換することによって, 逆に右舷側 ( $-\theta > 0$ ) の振幅関数が得られることになる.

このように, 船の後方で横切断計測した左右両舷に亘る1枚の波形記録を,  $y=0$  の中心線を境に右舷側と左舷側で別個に (15), (17)式を用いて解析することにより, 各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して, 非対称流場における振幅関数が決定できることになる. この間の事情は, 著者らが先に提示した縦切断法<sup>3)</sup>の場合と全く同様であり, Kelvin 波の横波 ( $\theta_1$ ) と縦波

( $\theta_2$ )が、共に

$$\left. \begin{matrix} \tan\theta_1 \\ \tan\theta_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{\cot\theta}{4} \cdot \{1 \mp \sqrt{1-8\tan^2\theta}\} \dots (18)$$

のように(附録(B-3)式において $\theta$ に関する積分の停留点として得られる<sup>6)Eqs.(13,41)</sup>、逆舷側に伝播する卓越素成に対応して得られている事実を裏書きしたものとなっている。

以上のように、本論で開発したFourier変換型の横切断波形解析法の算式(15),(17)は、縦切断法におけるNewman-Sharmaの式<sup>3)Eqs.(15),(17)</sup>を横切断方式に転換した形として得られており、4.1節(35),(36)式に示す従来の横切断法<sup>2),4),5)</sup>のように2枚の計測波形を必要とせず、1枚の横切断波形で事足りるばかりか、明らかに発散の問題も生じず、容易に連続的な振幅関数を算定できることから、序論でも述べた横切断法における解析上の弱点を少なくとも理論的には克服し得たものとする。

ただし、実際に曳航水槽で計測した横切断波形を解析するに際しては、次のような点に注意する必要がある。本論で提案する方法によれば、両舷での振幅関数は(15),(17)両式が示すように $y=0$ の中心線から半無限区間に亘るFourier変換に依存した形で定まることになるが、無限区間に亘るFourier変換の場合(4.1節(26)式に示す.)と異なり、ここでのFourier変換の値は、 $y$ 座標の原点位置(換言すれば、波源を集約して考える点)の選び方によって、その位相のみならず絶対値にも影響を受ける。従って、この座標原点の任意性が、結果として解析されたC波、S波の位相特性のみならず、波スペクトラム $\sqrt{C^2+S^2}$ にも影響を及ぼすため、その積分量として得られる造波抵抗や造波横力(附録(A-23),(A-22)式に示す.)にも任意性が残ってしまう。勿論、直進時には計測波形は左右対称に得られるから、その中心線 $x$ 軸は明らかであり任意性の入り込む余地はないが、斜航時のような左右非対称な計測波形に対しては、波系レベルでの中心線が果たしてFig.1のように船体中央を通して引けるのか、あるいは船首や船尾方向にどの程度ずれた位置を通るものかについての、適確な判断材料は持ち併せてはいない。しかしながら、実際には非対称な波形と言えども斜航角 $\beta$ がそれほど大きくなければ、次章のFig.4にも示すように中心線付近では反対称波は目立たず、波形はほぼ左右対称に得られると考えられるから、それを一つの判断基準として出来るだけ正確に波系レベルでの中心線を決定し、実験的に上述の誤差を最小限に押える対策を講ずる必要がある。

### 2.3 $x_c \gg 1(\theta \rightarrow 0)$ 近似に対する検討

前節で提案した波形解析の算式(15),(17)は、Fig.2

に示すように積分領域に偏角 $\theta$ の影響を考慮してFourier変換を行った後に、横切断位置が船より充分後方であるとし、 $x_c \gg 1$ を仮定して漸近的に得られたものである。本節では上述の解析の簡略化を図り、波形の表示式(1)及び(16)の段階で $x_c \gg 1$ の近似を行い、偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定した後、Fourier変換を施した場合<sup>2),4),5)</sup>について検討する。

このとき、波形の表示式は右舷・左舷の区別なく、

$$\zeta(x_c, y) \underset{(6-0)}{\underset{x_c \gg 1}{\widetilde{}}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) \cos(r_0 \omega \sec^2 \theta) + S(\theta) \sin(r_0 \omega \sec^2 \theta)\} d\theta \dots (19)$$

となり、これは一般に造波抵抗の計算などに用いられるKelvin Patternの表示式である。この(19)式は、偏角 $\theta$ が固定されているため放射条件を満足し得ず上流での波の計算には用いられないものの、後流での波形近似度は充分であることが既に確認されている<sup>3)Fig.6</sup>。従って、この(19)式を縦切断型の波形解析に適用すると誤った帰結を導く<sup>3)付録A</sup>ものの、横切断法に対しては近似的に(19)式を用いて解析を行っても、前節と同様な結論に到達できることが期待される。

実際、この(19)式によって表される波形 $\zeta(x_c, y) \rfloor_{x_c \gg 1}$ に対して、 $y > 0$ として(4)式と同様なFourier変換 $\mathfrak{F} \rfloor_{x_c \gg 1}$ を

$$\mathfrak{F} \rfloor_{x_c \gg 1} \equiv \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{Y_\infty} \zeta(x_c, y) \rfloor_{x_c \gg 1} \cdot e^{ir_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \quad (\text{ただし、} \phi > 0) \dots (20)$$

のように定義すると、積分領域は偏角 $\theta$ を考慮したFig.2の斜線部とは異なり、その全領域( $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq y \leq Y_\infty$ )に亘る矩形領域となる。従って、 $\theta$ と $y$ に関する積分順序も単純に交換できることから、前節(6)式と同様な式変形を行った後、 $y$ に関する積分を先に実施すると、結局、近似的なFourier変換 $\mathfrak{F} \rfloor_{x_c \gg 1}$ は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \rfloor_{x_c \gg 1} &= \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\tan\theta \sec\theta + \tan\phi \sec\phi} \cdot \\ &\times [e^{ir_0(x_c \sec\theta + Y_\infty(\tan\theta \sec\theta + \tan\phi \sec\phi))} - e^{ir_0 x_c \sec\theta}] d\theta \\ &- \frac{1}{2ir_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\tan\theta \sec\theta - \tan\phi \sec\phi} \cdot \\ &\times [e^{-ir_0(x_c \sec\theta + Y_\infty(\tan\theta \sec\theta - \tan\phi \sec\phi))} - e^{-ir_0 x_c \sec\theta}] d\theta \dots (21) \end{aligned}$$

と記すことができる。これは、偏角 $\theta$ を考慮して得られた前節(8)式において、 $x_c \gg Y_\infty$ を仮定し境界 $\theta_0 \rightarrow$

$-\pi/2$ とした場合に相等し、横切断位置 $x_c$ がFourier変換の上限 $Y_\infty$ より十分に大きいという関係を満たした上で $Y_\infty \rightarrow \infty$ なる極限操作を行うことになるから、 $x_c$ が有限であるとして $x_c \ll Y_\infty$ なる関係から(9)式が得られた時とは全く逆の状況にある。すなわち(21)式は、Fig. 2に示す下側の曲線状の領域IIが縮退したことにより(8)式でいう $\mathfrak{F}^{(3)}$ と $\mathfrak{F}^{(4)}$ が消滅する一方、上側の矩形状の領域Iに相等する $\mathfrak{F}^{(1)}$ と $\mathfrak{F}^{(2)}$ が $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ 間にまで引き延ばされた結果として得られている。

ここに、(21)式の両積分項において、 $\theta$ の正值領域( $0 \leq \theta \leq \pi/2$ )に対する部分は、各々(8)式に示す $\mathfrak{F}^{(1)}$ 、及び $\mathfrak{F}^{(2)}$ の積分下限を $Y_\infty \gg x_c$ の関係から $\theta_0 \rightarrow 0$ としたものに他ならないから、 $x_c \gg 1$ を仮定する限り前節と同様な事情により共に漸近的に消滅する。従って、(20)式のFourier変換値 $\mathfrak{F}]_{x_c \gg 1}$ を知るには、(21)式の負領域( $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$ )に対する積分を評価すれば良いから、それを解析の便を図って $\theta$ の正值領域に折り返せば、

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}]_{x_c \gg 1} \\ & \sim_{x_c \gg 1} \frac{i}{2r_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{C(-\theta) - iS(-\theta)}{\tan\theta \sec\theta - \tan\phi \sec\phi} \cdot \\ & \times [e^{ir_0(x_c \sec\theta - Y_\infty(\tan\theta \sec\theta - \tan\phi \sec\phi))} - e^{ir_0 x_c \sec\theta}] d\theta \\ & - \frac{i}{2r_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{C(-\theta) + iS(-\theta)}{\tan\theta \sec\theta + \tan\phi \sec\phi} \cdot \\ & \times [e^{-ir_0(x_c \sec\theta - Y_\infty(\tan\theta \sec\theta + \tan\phi \sec\phi))} - e^{-ir_0 x_c \sec\theta}] d\theta \\ & \dots\dots(22) \end{aligned}$$

のように書くことができる。ここに、第2項は分母が決してゼロにならないため $Y_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作と $x_c \gg 1$ の前提によって直ちに消失することから、最終的には(22)式に現れる第1項の特異積分を行えばFourier変換 $\mathfrak{F}]_{x_c \gg 1}$ が定まることになる。

実際、(22)式の第1項について考えると、大括弧内の1項目には $Y_\infty \rightarrow \infty$ の極限操作から(11)式のRiemann-Lebesgueの補助定理が、2項目には $x_c \gg 1$ の前提から(12)式と同拡張定理が適用できて、共に積分値には $\theta = \phi$ の近傍のみが寄与することとなり、漸近的に

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}]_{x_c \gg 1} \sim_{x_c \gg 1} \left[ \text{1st. term of Eg. (22)} \right] \\ & \sim_{x_c \gg 1} \frac{i\pi}{2r_0} \cdot \frac{C(-\phi) - iS(-\phi)}{\sec\phi(\sec^2\phi + \tan^2\phi)} \cdot \\ & \times [-ie^{ir_0 x_c \sec\phi} - ie^{ir_0 x_c \sec\phi} \cdot \text{sgn}(\tan\phi \sec\phi)] \\ & \dots\dots(23) \end{aligned}$$

と計算されることから、結局(20)式で定義される $y > 0$ なる右舷側の横切断波形に対するFourier変換 $\mathfrak{F}]_{x_c \gg 1}$

が、 $\phi = 0$ 近傍を除外した $\phi$ の正值に対して漸的に、

$$\begin{aligned} & \mathfrak{F}]_{x_c \gg 1} \\ & \sim_{x_c \gg 1} \frac{\pi}{r_0} \cdot \frac{e^{ir_0 x_c \sec\phi}}{\sec\phi(2\sec^2\phi - 1)} \cdot \{C(-\phi) - iS(-\phi)\} \\ & \dots\dots(24) \end{aligned}$$

のように得られ、この結果は前節で偏角 $\theta$ を考慮して導かれた(14)式と一致している。また、 $y < 0$ なる左舷側の横切断波形に対するFourier変換の場合も、右舷の場合と同様に、波形の表示式として偏角 $\theta$ を考慮した(16)式を用いても、偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定した(19)式を用いても、横切断位置が船から充分後方であるとして $x_c \gg 1$ に対する漸近値で論ずる限り、同一の帰結が導かれる。

このことから、Fourier変換型の横切断波形解析法の算式を導く場合、前節で行ったように波形表示式において偏角 $\theta$ の影響を考慮することは、さほど重要ではなく、従来成されているように<sup>2),4),5)</sup>波形の段階で $x_c \gg 1$ なる近似を行い、偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定した後にFourier変換を施しても、同一の結果が得られることが分かった。この事情は、著者らが先に示した縦切断法の場合<sup>3)</sup>とは大きく異なるところであり、その理由は(19)式に対する考察でも触れたように、 $x_c \gg 1$ 近似の場合、縦切断法に対する $|y_c| \gg 1$ 近似の場合と違って、Kelvin Patternが生成されることにある。すなわち、横切断法の場合も形式上は、 $x_c$ が有限である限りFourier変換の上限である $Y_\infty \rightarrow \pm\infty$ では偏角は $\theta \rightarrow \pm\pi/2$ となり、これを $\theta \rightarrow 0$ で近似することは無理を生ずるはずであるが、実際には次章のFig. 4にも示すように、後流での波は概ねKelvin波の頂角 $\theta = \pm 19^\circ 28'$ の範囲内(矢印↑)に納まって生成されるため、結果的には偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定して解析を行っても、上述のような不都合は生じなかったものと推察される。これに対して縦切断法の場合、 $|y_c| \gg 1$ の近似を行って偏角を $\theta \rightarrow \pm\pi/2$ で固定すると、波形の表示式自体が上流にも波を生成するような形となるため<sup>3)Fig. 6</sup>、これをx方向に $-\infty$ から $+\infty$ までFourier変換することは、生成波に対する放射条件の壁を犯して積分することになって問題を生じる<sup>3)Fig. 7</sup>こととなり、実際に $y_c$ が有限である以上、波に対する偏角 $\theta$ が $\pm\pi$ から0まで変化する影響を考慮して解析を行うことが肝要であった訳である<sup>3)</sup>。

### 3. 理論波形に対する解析例ならびに考察

本章では、第2章で開発した解析手法を、没水した単一の斜軸Doubletが生成する理論波形に適用し、その妥当性を検証する。また、解析結果に及ぼす横切断位置 $x_c$ の影響についても、考察を加える。

### 3.1 斜軸Doublet

計算の対称としたPoint Doubletは、著者らが先に縦切断法に対する数値実験<sup>3)</sup>にも採用したものであり、原点oの水面直下 $z=-f$ に置かれ、斜軸角 $\beta$ をFig.1に示すように水平面内の船首方向に取るとき、その振幅関数は、

$$\left. \begin{aligned} S(\theta) &= -\frac{\gamma_0^2}{4} \cdot e^{-\gamma_0 f \sec^2 \theta} \\ &\quad \times (\cos \beta - \sin \beta \cdot \tan \theta) \cdot \sec^4 \theta \\ C(\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

のように単純な形で与えられる。ここに、上式は附録(B-4)式において、軸の方向余弦 $\nu(l, m, n)$ を $l = -\cos \beta, m = \sin \beta, n = 0$ と置き、また強さ $\mu$ を(B-14)式から $\mu = \frac{1}{16} U_\infty D^3$ と規定した後、このDoubletが直進時に表す没水球の直径 $D$ を規準に無次元化して得られたものであり、この場合C波は生じず、S波のみで素成波は構成されている。

### 3.2 横切断波形

本節では、斜軸Doubletから生成される波紋の横断面形状について述べる。

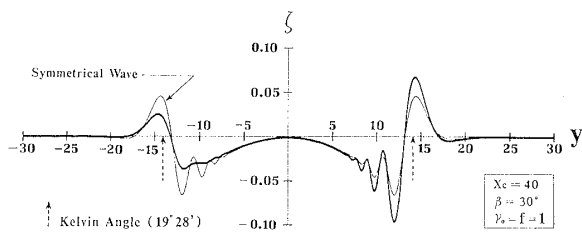


Fig.4 Calculated transverse wave profiles generated by a point doublet with oblique axis at the cut of  $x_c=40$

Fig.4は、 $x_c=40$ すなわち原点から下流側に直進時の直径の40倍だけ離れた断面での横切断波形を示したものであり、 $x_c \gg 1$ に対する漸近解として得られた前章(15), (17)両式の検証を念頭に置いて、このように計測断面を充分後方を選んである。このとき、斜軸角は $\beta = 30^\circ$ 、波数ならびに没水深度は共に $\gamma_0 = f = 1$ であり、Point Doubletは直進時の直径分だけ水面下に沈んで位置することになり、先に報告した縦切断法による解析結果<sup>3)</sup>との比較を容易にするため、全く同様な状態を選んである。

この理論波形は、(25)式で与えられる振幅関数を、 $y > 0$ なる右舷側に対しては(1)式に、 $y < 0$ なる左舷側に対しては(16)式に代入し、偏角 $\theta$ の影響を考慮しながら計算して描いたものである。ただし、下流での

横切断波形の場合、偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定したKelvin Patternの表示式(19)を用いて計算を行っても、その差は図中には現れないほどであり、偏角 $\theta$ に対する依存度は極めて低く、2.3節で行った $x_c \gg 1$ 近似に対する妥当性を裏付けるものであり、縦切断波形とは大いに事情を異にするところである<sup>3)</sup>。計算に当っては、積分変数 $\theta$ が $\pm \pi/2$ に近づくにつれて、またパラメタとして $\gamma_0$ や $x_c, y$ が大きくなって被積分関数の変動が激しくなっても、 $\theta$ に関して一定の刻み( $\Delta \theta \approx 1 \text{deg.}$ )で積分を実行できるよう、振幅関数C, Sならびに位相関数 $\gamma_0 \omega \sec^2 \theta$ を共に区分的に $\theta$ の1次式で近似し、Fillonの積分公式を用いて行った。

Fig.4の縦軸 $z$ と横軸 $y$ の縮率は1/100であり、横方向に圧縮して表示されているため波形が尖った印象を受けるが、実際には緩やかな波形勾配である。図中、細い実線で示すのが直進Doublet( (25)式において $\cos \beta$ が掛かる項)から生じた左右対称な波形であり、これに反対称成分( $\sin \beta$ が掛かる項)を足し引きすることによって、太い実線で示すような左右非対称な波形が生成されることになり、Doubletの軸を右舷方向に $\beta = 30^\circ$ だけ振ったことにより、右舷側( $y > 0$ )の波形の方が左舷( $y < 0$ )より波高が高く、波動的な変動も激しくなっている様子が分かる。また、図に見られるように横切断波形は、 $y=0$ なる中心線の付近では波動的な要素が弱く、自由波と言えども局部波動的な挙動を示している。これは中心線付近での波紋が横波に支配されるのに対し、横切断計測では主に縦波成分を抽出することになるため、そこでの横波の位相差を十分に捉え切れないことによる結果と考えられ、両舷への側方に離れるにしたがって生ずる波動的な要素は縦波の寄与を示すものであり、主に横波成分を捉えた縦切断波形<sup>3)</sup>Fig.4とは全く様相が異なる。

一方、図中の矢印↑は、Kelvin波の頂角 $19^\circ 28'$ の及ぶ範囲( (18)式の根号内が正の条件  $|\tan \theta| \leq 1/\sqrt{8}$  として与えられる。)を示したものであり、 $\pm x_c/2\sqrt{2}$ の位置に相等する。これを見ると、実際にはDoubletの自由波が、このように切断面が相当に後方であっても完全には矢印の範囲内には納まっておらず、Kelvin Angleより幾分か外側に拡がりを持って生成される様子が分かる。また、矢印の辺りは、概ねKelvin波のcusp lineの位置に相等すると考えられ、この近傍での生成波の減衰挙動はHogner波動的な $O(1/\sqrt{x})$ であり、内側の大部分の領域が示すKelvin波の特性 $O(1/\sqrt{x})$ よりも減衰が弱いため、大きな波高を生じたものであろう。

### 3.3 振幅関数

本節では、前節でFig.4のように得られた横切断波形に、それぞれ左右両舷で別個にFourier変換を施し、

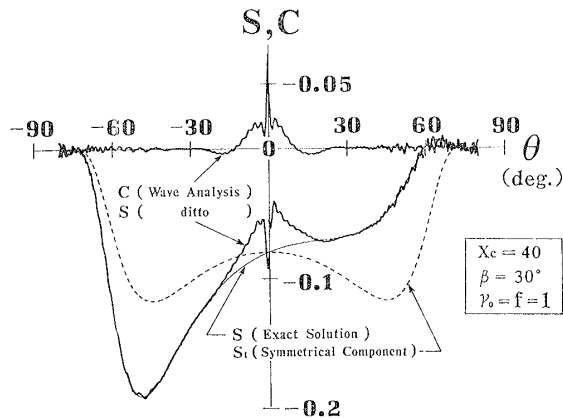


Fig.5 Analyzed wave amplitude functions of a point doublet with oblique axis at the cut of  $x_c = 40$

第2章の(15), (17)式で提案した関係から振幅関数を再現してみることににより, 開発した手法の妥当性を検証する。

Fig.5は, そのようにして $x_c = 40$ における横切断波形から求め戻された振幅関数の結果であり, 詳細な検討は後に譲るとしても, 本論で開発した解析法によれば, 確かに1枚の横切断波形のFourier変換から, 容易に連続的な振幅関数を求め得ることが分かる。

ここに, 波形をFourier変換するに当っては,  $y$ に関する刻みを $\Delta y = 0.1$ として, 1次式近似のFillonの積分公式を用いて行った。また, 横切断波形の場合, Fig.4に見られるように, 波高はKelvin波の外縁より側方では速やかに消失するから, 形式的には(15), (17)式が示すように $y = 0$ の中心線から無限側方までの半無限区間に亘るFourier変換を必要とするけれども, 実際には有限区間のFourier積分で事足りる。したがって, 縦切断法の場合, たとえ理論波形に対してでも<sup>3)</sup>, 後方での減衰が $O(1/\sqrt{x})$ と弱いため打ち切り点より後方での半無限区間に亘る積分をNewman修正<sup>1)</sup>によって仮想しなければならなかったのに対し, 横切断法の場合この種の修正は不要であり, この点が序論でも述べたように1つの長所となっている。

Fig.5において, 細い実線で示すのが(25)式において $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma_0 = f = 1$ として描いた元々の振幅関数 $S(\theta)$ であり, 破線は, その対称成分を示すものである。一方, 太い実線で示すのが, Fig.4に記録された波形のFourier変換から得られたS波ならびにC波である。ここに,  $\theta < 0$ なる左側の振幅関数S, Cは, (15)式を介して $y > 0$ なる右舷側の横切断波形から得られたものであり, 逆に $\theta > 0$ なる右側の振幅関数は, (17)式を介して $y < 0$ なる左舷側の波形から得られている。このように, 各々が逆舷側に伝播する素成波に対応し

て, 非対称流場における振幅関数が決定されることが, 本論で開発した横切断法の大きな特徴である。これを見て大雑把な言い方をすると, 波高の高い右舷の波形をFourier変換して得られた $\theta$ 負領域の振幅関数の方が, 波高の低い左舷の波形から得られた $\theta$ 正領域のそれよりも, 絶対値が大きく得られるようである。

さて, 今の場合 $x_c = 40$ として切断面を充分後方を選んでいられることもあって, 解析されたS波は $|\theta| \leq 15^\circ$ 間の中心部を除けばその非対称性も含めて元々の振幅関数Sを高精度に再現できている。一方, C波については $\theta = 0$ の付近を除けば概ねゼロと見なしても差し支えない程度の大きさしか生じておらず, 元々DoubletにはC波が存在しないという素成波の位相特性についても良好に再現できているようである。このことから, 本論で開発した(15), (17)の関係式が,  $x_c \gg 1$ なる漸近解として正しいことが確認されたことになる。ただし, 図に見られるようにS波, C波の両者とも, 解析された結果には $\theta$ に関して細かく波打つ傾向が生じており, 縦切断法の場合<sup>3)Fig.5</sup>には認められなかった現象である。

上述のように, 本論で提案する解析手法は, 一樣流方向に伝播する $\theta = 0$ 近傍の素成波振幅の推定精度に問題を残しており, それに伴ってFig.5に見られるように,  $\theta = 0$ の対称面を境に正側と負側の振幅関数に若干の不連続が生ずることになる。なお, この問題は, 縦切断法による解析結果にも生じていたものであり<sup>3)Fig.5, 8</sup>, 縦切断法の場合,  $|y_c| \gg 1$ に対して漸近的に得られた解析式そのもの<sup>3)Eqs. (15), (17)</sup>が $\theta = 0$ 近傍では成立せず, 加えてその辺りの素成波振幅が打ち切り点より後方で仮想したNewman波形<sup>1)</sup>に依存した形で求まることに起因していた。同様に, ここに示す横切断法の場合も, 解析式自体が $\theta = 0$ 近傍で数学的に破綻する(2.2節(10)式 $\rightarrow$ (14)式)。従って, (15), (17)式のように得られた漸近解が $x_c \gg 1$ に対する第1近似解であることから, その導出過程において捨て去った高次項がこの $\theta = 0$ 近傍の誤差に寄与していると考えられ, 今後は波形の単純なFourier変換法という本来の利点を損なうほど式が複雑にならぬよう, ここで提案した第1近似解の簡単な修正という形で漸近解の近似度を高める努力が必要と思われる。

一方, 全く同様な状態の斜軸Doubletに対し, 先に示した縦切断法の場合, 切断面が $y_c = \pm 2$ の位置でも十分に振幅関数を再現し得た事実を考え併せると<sup>3)Fig.5</sup>, 今回提案した横切断法が不当に遠方での解析を要求するかの印象を受ける。ただし, 今回解析の対象としたのは没水特異点による波であり, 一般に没水体が生成する波は横波が強いことから, 横切断解析には適さなかったことも考えられ, 実際の水上市船の場合とは状況

が異なり、Fig.5の結果1枚でもって、横切断面 $x_c$ の選択について即断を下すことには無理があり、この点については次節で素成波振幅の積分量としての造波抵抗や造波横力のレベルで検討を行うことにする。しかしながら、横切断法ならびに縦切断法<sup>3)</sup>の算式が、共に数学的には $x_c \gg 1$ あるいは $y_c \gg 1$ なる前提の下に漸近的に得られているものの、本論で開発した横切断法の $x_c$ に対しては、縦切断法の $y_c$ に比べて格段に大きな値を採用すべきであることは、たとえ水上船の場合であっても論を待たないであろう。ただし、本章で定義する横切断面の無次元座標 $x_c$ は、規準長 $D$ を直進時にこのDoubletが表す没水球の直径に取っており、一般の船を対象として捉える場合には、この $D$ は船幅 $B$ あるいは球状船首の直径に対応するから、この $x_c$ を通常の船長 $L$ に対する無次元スケールに書き換えれば $x_c/(L/B)$ となり、例えば $L/B=10$ 程度の細長船を対象に考えれば、切断面の $x$ 座標もここで言う $x_c$ よりも1桁程小さくなるため、Fig.5は $x_c=40$ の断面での結果であるが、これとても原点から4船長だけ下流側での結果とも見なせ、幾分か考え易くなる。

したがって、通常の曳航水槽のように長さ比べて幅の狭い水槽で横切断型の波形解析を実施する場合、水槽側壁からの反射波が返ってくる以前の横断面での解析で、果たして十分に振幅関数を求め得るかどうかについては、今後更に実験的にも理論的にも研究を進めるべき問題であり、これ以上ここでは立ち入らない。

### 3.4 造波抵抗ならびに造波横力

本節では、横切断波形を解析した結果として得られた振幅関数から、造波抵抗や造波横力を算定した結果

について述べる。

Fig.6は、前節で紹介した振幅関数Fig.5と同一の横断面 $x_c=40$ で解析を行ったものであり、斜軸角 $\beta=30^\circ$ 、没水深度 $f=1$ の場合のPoint Doubletに対する造波抵抗係数 $C_{xw} (\equiv X_w / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D^2)$ ならびに造波横力係数 $C_{yw} (\equiv Y_w / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D^2)$ をFroude数( $F_n \equiv U_\infty / \sqrt{gD} = 1/\sqrt{\gamma_0}$ )ベースに置点した結果を示している。図中、太い実線で示すのが、波形のFourier変換から得られた振幅関数を、(A-25),(A-24)両式(附録Aにおいて運動量定理により導出)に従って $\theta$ に関して積分して得られたものである。一方、細い実線は、 $C_{xw}, C_{yw}$ 各々に対する厳密解を示し、附録Bで導いた(B-15),(B-16)両式において、 $l = -\cos \beta, m = \sin \beta, n = 0$ と置いて描画したものであり、これは当然のことながらFig.5に示す振幅関数に対する厳密解 $S(\theta)$ を(A-25),(A-24)両式に従って数値的に積分した結果と一致している。この結果から、横力 $C_{yw}$ はFroude数の全域に亘り負値として得られていることから、造波に基づく横力が循環成分に因る揚力とは逆向きに生じていることが分かり、太線と細線の両者を見比べると、この程度に切断面を後方に採った場合、横力については本論での解析結果と厳密解は高精度で一致している。また、抵抗 $C_{xw}$ については、解析の対象が単一の没水特異点にも拘わらず、解析結果には高速域を除いて厳密解には現れないハンプ・ホローが認められるものの、平均的には厳密解を良好に説明できているようである。このように抵抗と横力の推定精度に差が生ずるのは、前節Fig.5に見られるように、本論で開発した手法が $\theta=0$ 近傍の振幅関数すなわち横波に対する解析精度に問題を残すことに起因しており、解析された振幅関数がFig.5のように $\theta=0$ の辺りで凹んで得られた場合には $C_{xw}$ 曲線の谷の位置に相当し、逆に凸状態の時が山に対応すると考えられる。これに対し横力 $C_{yw}$ の場合は、(A-24)式が示すように(A-25)式の造波抵抗と異なり、重率として更に $\tan \theta$ を乗じて積分することから、 $\theta=0$ 付近の解析誤差に影響されずFig.6のように良好に推定し得たものである。

一方、Fig.7は同一のDoubletに対し横切断面を前方に寄せ $x_c=10$ の位置で解析を行ったものであり、横力 $C_{yw}$ については、4倍程後方での解析から得られたFig.6に比べれば厳密解との差も僅かながら生じてはいるものの、この程度の位置で解析を行っても上述の理由から実用的には十分な精度で厳密解を説明できるようである。しかし、抵抗 $C_{xw}$ については先の $x_c=40$ の場合よりFroude数に関するハンプ・ホローが更に激しく得られており、抵抗を解析するには計測断面がDoubletに近過ぎるようである。

そこで、本論で開発した手法による解析結果 $C_{xw}$ ,

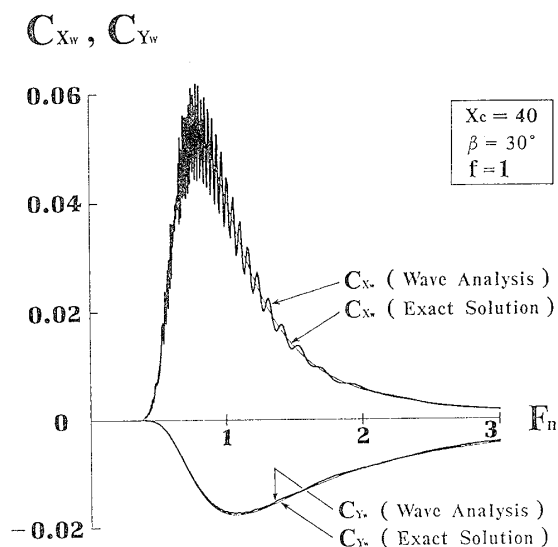


Fig.6 Analyzed wave making resistance  $C_{xw}$  and the lateral force  $C_{yw}$  versus Froude's number for a point doublet with oblique axis at the cut of  $x_c=40$

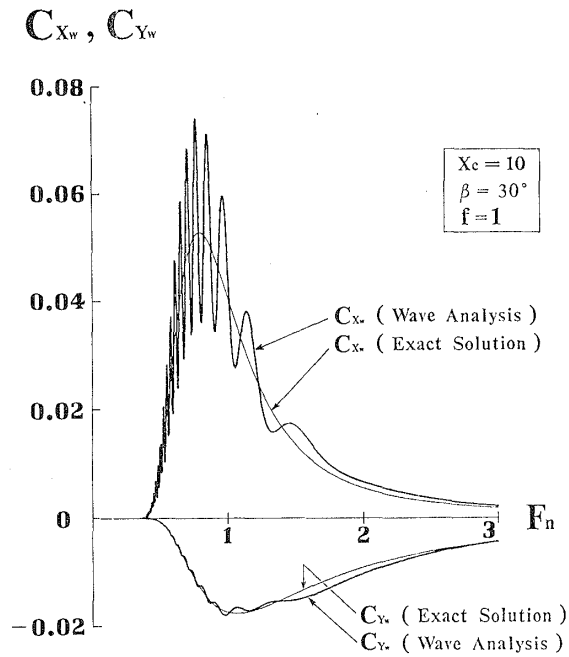


Fig.7 Analyzed wave making resistabce  $C_{xw}$  and the lateral force  $C_{yw}$  versus Froude's number for a point doublet with oblique axis at the cut of  $x_c = 10$

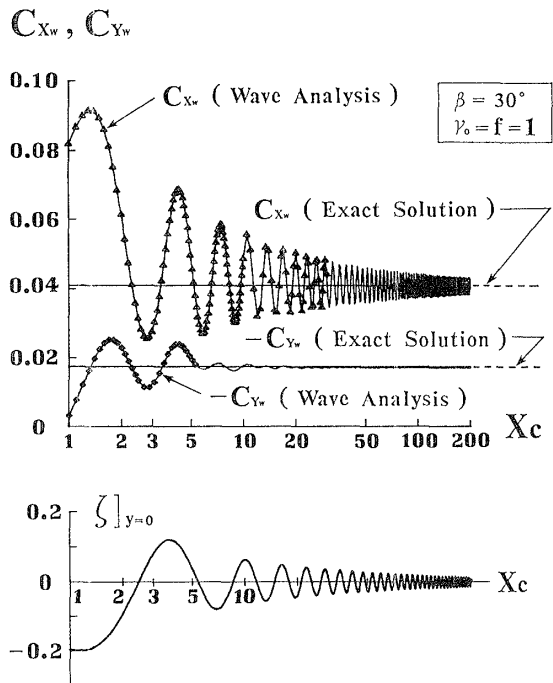


Fig.8 Dependence of analyzed wave making resistance  $C_{xw}$  and the lateral force  $C_{yw}$  upon the transverse cutting position  $x_c$  for a point doublet with oblique axis

$C_{yw}$ の横切断位置 $x_c$ に対する依存性を同一のパラメタのDoubletを対象に調査したものがFig.8であり、横軸には $x_c$ の対数スケールを取っている。この図から、本解析法による造波抵抗値 $C_{xw}$ には切断面を後方を取るに従って週期的に変動しながら漸近的に真の値に近づいていく様子が現れている。なお、参考までに対応する横断面 $x_c$ における $y=0$ の波高すなわち中心線上の縦切断波形を下に描画しておいたが当初の予想に反して、この波形と $\zeta|_{y=0}$ の山谷と抵抗値 $C_{xw}$ の $x_c$ に関するハンプ・ホローの間には、極立った相関関係は認められないようであり、 $x_c$ に関する変動週期も異なるから、中心線での縦切断波形の山あるいは谷の位置で解析を行えば、真値に近い造波抵抗値が得られるというような予測は付かないようである。他方、横力 $C_{yw}$ についてはグラフの見易さのため符号を反転させて示しているが、その値が先述の理由により $\theta = 0$ 近傍の振幅関数に余り依存しない形で得られることから、切断面 $x_c$ の選び方によって生ずる変動も抵抗のように目立たず、比較的船に近い位置で解析を行っても、安定した横力の値を得ることが出来るようである。

以上のことから、本論で開発した横切断法が縦波の解析に秀でることから、直進時の造波抵抗よりもむしろ斜航時の造波横力の解析に適した手法であるとも言えよう。

#### 4. 従来の横切断法に対する検討

第2章で開発したFourier変換型の横切断法は、その算式(15),(17)が示すように、船の後方で横切断計測した1枚の波形記録を $y=0$ の中心線を境に2分割し、それぞれ左右両舷に対して別個にFourier変換を施すことによって振幅関数を決定できる形として得られている。本章では、従来の横切断法が行っているように、得られた波計記録を左右両舷に亘って一度にFourier変換を施した場合<sup>(2),(4),(5)</sup>について検討するとともに、本論で提案した解析法との関連についても言及する。

##### 4.1 従来型の横切断波形解析法

本節では、従来行われているように横切断計測された波形記録 $\zeta(x_c, y)$ を

$$\mathfrak{A} \equiv \lim_{Y_{\infty} \rightarrow \infty} \int_{-Y_{\infty}}^{Y_{\infty}} \zeta(x_c, y) e^{i\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \quad (\text{ただし, } \phi > 0) \quad \dots\dots(26)$$

のように、左舷遠方から右舷遠方まで、 $y$ 方向に無限区間に亘ってFourier変換することを考え、それを第2章で行った半無限区間のFourier変換 $\mathfrak{F}$ と区別するために、 $\mathfrak{A}$ と書くことにする。ここに、2.3節の考察から、横切断法の場合、波形表示式の段階で近似的に偏

角を  $\theta \rightarrow 0$  で固定して Fourier 変換を施しても、最終的に  $x_c \gg 1$  なる近似を行う限り、それを考慮した場合と同一の結果を供することが分かっているので、本節での解析を容易にするため、(26)式に対しても波形  $\zeta$  の表示式として偏角に対して  $x_c \gg 1$  近似を施した(19)式を採用することにする。

実際、(19)式によって表される波形  $\zeta(x_c, y) \Big|_{x_c \gg 1}$  を(26)式に代入し、 $\theta$  と  $y$  に関する積分順序を交換し  $y$  に関する積分を先に実行できる形に変形すると、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{2} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) - iS(\theta)\} \cdot e^{i\gamma_0 x_c \sec \theta} d\theta \cdot \\ &\times \int_{-Y_\infty}^{Y_\infty} e^{i\gamma_0 y (\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi)} dy \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{C(\theta) + iS(\theta)\} \cdot e^{-i\gamma_0 x_c \sec \theta} d\theta \cdot \\ &\times \int_{-Y_\infty}^{Y_\infty} e^{-i\gamma_0 y (\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi)} dy \dots\dots(27) \end{aligned}$$

となり、その積分も簡単に実行できることから、結局 Fourier 変換  $\mathfrak{A}$  として、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{1}{\gamma_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) - iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi} \cdot \\ &\times e^{i\gamma_0 x_c \sec \theta} \cdot \sin\{\gamma_0 Y_\infty (\tan \theta \sec \theta + \tan \phi \sec \phi)\} d\theta \\ &+ \frac{1}{\gamma_0} \lim_{Y_\infty \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\theta) + iS(\theta)}{\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi} \cdot e^{-i\gamma_0 x_c \sec \theta} \cdot \\ &\times \sin\{\gamma_0 Y_\infty (\tan \theta \sec \theta - \tan \phi \sec \phi)\} d\theta \dots\dots(28) \end{aligned}$$

を得ることができる。ここに、(28)式の積分は  $Y_\infty \rightarrow \infty$  の極限操作を伴うから、第2章(11)式に示す Riemann-Lebesgue の補助定理の虚部を適用することによって容易に評価できる。今、Fourier 変換の引数を  $\phi > 0$  としていることから、(28)式の第1項は  $\theta = -\phi$  で、第2項は  $\theta = \phi$  で共に分母がゼロとなり、各々その近傍のみが積分値に寄与することになるから、(26)式で定義される Fourier 変換  $\mathfrak{A}$  は、第2章の  $\mathfrak{F}$  に対するように  $\phi = 0$  近傍を除外する必要もなく、 $\phi$  の正值に対して一様に、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{\pi}{\gamma_0 \sec \phi (\sec^2 \phi + \tan^2 \phi)} \cdot \\ &\times \left[ \begin{aligned} &\{C(-\phi) - iS(-\phi)\} \cdot e^{i\gamma_0 x_c \sec \phi} \\ &+ \{C(\phi) + iS(\phi)\} \cdot e^{-i\gamma_0 x_c \sec \phi} \end{aligned} \right] \dots\dots(29) \end{aligned}$$

のように計算される。この式は、前章の Fourier 変換  $\mathfrak{F}$  に対する(14)式とは様相が異なり、(14)式から(15)式に移る時のように、振幅関数  $C, S$  を求め得る形に単

純に書き換えることはできないから、取りあえず(29)式の右辺を実部と虚部に分解し、変数を  $\phi \rightarrow \theta$  に置換して整理すれば、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{2\pi}{\gamma_0 \sec \theta (2\sec^2 \theta - 1)} \cdot \\ &\times \left[ \begin{aligned} &C_1(\theta) \cos(\gamma_0 x_c \sec \theta) + S_1(\theta) \sin(\gamma_0 x_c \sec \theta) \\ &+ i\{S_2(\theta) \cos(\gamma_0 x_c \sec \theta) - C_2(\theta) \sin(\gamma_0 x_c \sec \theta)\} \end{aligned} \right] \dots\dots(30) \end{aligned}$$

のように記すことができる。ここに、右辺に現れる  $C_1, C_2$  及び  $S_1, S_2$  は、各々

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) \Big\} &= \frac{C(\theta) \pm C(-\theta)}{2} \\ C_2(\theta) \Big\} & \\ S_1(\theta) \Big\} &= \frac{S(\theta) \pm S(-\theta)}{2} \\ S_2(\theta) \Big\} & \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

が示すように、振幅関数  $C, S$  に対する対称成分 ( $C_1, S_1$ ) ならびに反対称成分 ( $C_2, S_2$ ) を表している。

そこで、(30)式に対して両辺の実部と虚部を各々等置すれば、横切断波形の Fourier 変換と素成波の振幅関数との間に介在する関係式として、対称成分に対しては、

$$\begin{aligned} C_1(\theta) \cos(\gamma_0 x_c \sec \theta) + S_1(\theta) \sin(\gamma_0 x_c \sec \theta) \\ = \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{A}_c(\theta, x_c) \sec \theta (2\sec^2 \theta - 1) \dots\dots(32) \end{aligned}$$

を、反対称成分に対しては

$$\begin{aligned} S_2(\theta) \cos(\gamma_0 x_c \sec \theta) - C_2(\theta) \sin(\gamma_0 x_c \sec \theta) \\ = \frac{\gamma_0}{2\pi} \mathfrak{A}_s(\theta, x_c) \sec \theta (2\sec^2 \theta - 1) \dots\dots(33) \end{aligned}$$

を得ることができる<sup>5)Eq.(28)</sup>。ここに、 $\mathfrak{A}_c(\theta, x_c)$  及び  $\mathfrak{A}_s(\theta, x_c)$  は、 $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_c + i\mathfrak{A}_s$  で定義されるように(26)式の実部と虚部を意味し、各々を具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_c(\theta, x_c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x_c, y) \cos(\gamma_0 y \tan \theta \sec \theta) dy \\ \mathfrak{A}_s(\theta, x_c) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x_c, y) \sin(\gamma_0 y \tan \theta \sec \theta) dy \end{aligned} \dots\dots(34)$$

のようになっており、横切断波形の  $\cos$  変換ならびに  $\sin$  変換を表すものである。

ところで、(32), (33)両式は各々未知数が  $C_1, S_1$  あるいは  $C_2, S_2$  と2個ずつあるのに対し、得られた関係式は1個ずつに過ぎないから、1横断面での波形記録からは振幅関数を決定することはできない。しかし、式中の Fourier 変換  $\mathfrak{A}_c$  と  $\mathfrak{A}_s$  は一般に切断位置  $x_c$  に対して

異なった値を取ることになるから、逆にこれを利用し  $x_c^{(1)}, x_c^{(2)}$  における2横断面での切断波形からの情報を用いることによって、(32), (33)式からは都合2組4個の関係式が得られ、初めて振幅関数は解き得る形となる。実際、2組の連立方程式は簡単に解け、得られた結果を纏めると、対称成分  $C_1, S_1$  は

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(1)}) \sin(\gamma_0 x_c^{(2)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(2)}) \sin(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin\{\gamma_0(x_c^{(2)} - x_c^{(1)}) \sec\theta\}} \\ S_1(\theta) &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(2)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(2)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin\{\gamma_0(x_c^{(2)} - x_c^{(1)}) \sec\theta\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

から、反対称成分  $C_2, S_2$  は、

$$\left. \begin{aligned} C_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(2)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(2)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin\{\gamma_0(x_c^{(2)} - x_c^{(1)}) \sec\theta\}} \\ S_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(1)}) \sin(\gamma_0 x_c^{(2)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(2)}) \sin(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin\{\gamma_0(x_c^{(2)} - x_c^{(1)}) \sec\theta\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

から決定し得ることが分かり、よく知られたFourier変換型の横切断法の式となる<sup>5)Eq.(29)</sup>。

(35), (36)両式は、2箇所横断面  $x_c^{(1)}, x_c^{(2)}$  での計測波形の差から振幅関数を求める形であるから、一般に

$$\gamma_0(x_c^{(2)} - x_c^{(1)}) \sec\theta n = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \dots\dots\dots(37)$$

を満たす  $\theta = \theta_n$  の所で分母がゼロとなり、振幅関数が発散するという問題が生じ、このように2枚の波形記録からの連立方程式を解くという手法を採用する限り、連続的な振幅関数を得ることはできない、この難点を回避するには、少なくとも3枚以上の切断波形からの情報を(32), (33)式に入力し、最小自乗法によって振幅関数を決定するという策を講じなければならず<sup>2), 5)</sup>、実験的にも相当な労力を強いられることになる。これに対し、波高記録と併せて縦方向の波形勾配  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  を何

らかの方法で知ることができたならば、少なくとも理論的には1横断面のみの情報から発散の難点も除去された形で振幅関数を算出することが可能となるが<sup>2), 5)</sup>、勾配の情報を得るには計測上多くの困難を伴うであろうし、精度の保証も波高記録ほどには期待できないため、現実的には有効な解析手法になり得るとは思われない。一方、波形の単純なFourier変換法という立場を離れると、有限な水槽幅に対する1枚の波形記録を水槽壁による逐次的な鏡像効果によってFourier級数に展開し、その級数和から造波抵抗値を算定するという巧妙な手法<sup>5)</sup>も既にEggers<sup>4)</sup>やSharma<sup>3)</sup>によって考案されているが、これとても離散的にしか振幅関数を定義できないため連続的な意味での振幅関数を得ることができず、また解析自体もFourier変換法ほどには容易でない。

しかしながら、対称成分の  $C_1$  と反対称成分の  $S_2$  に限っては、連立方程式の解である(35), (36)両式において分子の切断位置  $x_c^{(2)}, x_c^{(1)}$  に対する位相が  $\sin(\gamma_0 x_c^{(2)} \sec\theta)$ ,  $\sin(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta)$  のように共に  $\sin$  関数となることから、著者らが先に  $x \gg 1$  近似による縦切断法の対称成分に対して行ったと同様に<sup>3), 4), 6), 7)</sup>、波高計測を  $x_c^{(2)} = 2x_c^{(1)}$  を満たす2横断面で行うことにすれば、 $C_1, S_2$  の両者は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times [2 \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) - \mathfrak{A}_c(\theta, 2x_c^{(1)})] \\ S_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times [2 \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) - \mathfrak{A}_s(\theta, 2x_c^{(1)})] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

のように分母が約分された形に変形できることから、前述の発散の難点を除去し得る。しかし、残りの  $S_1, C_2$  に対しては、分子の切断位置に対する位相が  $\cos$  関数で与えられるため、同様な2横断面で解析を行うことにしても、

$$\left. \begin{aligned} S_1(\theta) &= -\frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_c(\theta, x_c^{(1)}) \cos(2\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_c(\theta, 2x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta)} \\ C_2(\theta) &= \frac{\gamma_0}{2\pi} \sec\theta (2\sec^2\theta - 1) \cdot \\ &\quad \times \frac{\left[ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_s(\theta, x_c^{(1)}) \cos(2\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \\ - \mathfrak{A}_s(\theta, 2x_c^{(1)}) \cos(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta) \end{array} \right]}{\sin(\gamma_0 x_c^{(1)} \sec\theta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

のように分母が残ることから上述の便法も無力であり、たとえ2箇所の切断位置をどのように選んでも、発散の難点を除去し得ないようである。したがって、理論的にはともかく、現実的には計測した波形記録を解析した結果として振幅関数C,Sの位相特性が知れるのであり、予め対称流場に対して $S_1=0$ を、または反対称流場に対して $C_2=0$ を仮定できるわけではないので、幸運にも $C_1, S_2$ に対してのみ(38)式のような解析式が得られたとしても、実際問題に対しては有用な結果を供さないであろう。(ただし、 $C_1$ 波あるいは $S_2$ 波のみを生成する理論波形に対する解析精度の検証には有効であるから、その例を第5章に示す。)

このような状況を考えると、本節で検討した従来型の横切断法は、第2章で提案した方法とは見掛け上は全く様相を異にし、両者は異種の解析手法との印象を受けるが、理論的には従来型の手法は本論で開発した横切断法の結果から導き得るものであり、両者が同一の仮定に基づいて得られていることを次節で示す。

4.2 従来型の横切断法と

本論で開発した手法との関係

本節では、前節で得られた従来型の横切断法に対する結果が、第2章で開発した算式を用いることによっても容易に導かれることを示す。

まず、(26)式で定義される無限区間に亘るFourier変換 $\mathfrak{A}$ は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \lim_{Y_{\infty} \rightarrow -Y_{\infty}} \int_{-Y_{\infty}}^{Y_{\infty}} \zeta(x_c, y) \cos(\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi) dy \\ &+ i \cdot \lim_{Y_{\infty} \rightarrow -Y_{\infty}} \int_{-Y_{\infty}}^{Y_{\infty}} \zeta(x_c, y) \sin(\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi) dy \\ &\equiv \mathfrak{A}_c + i \mathfrak{A}_s \end{aligned} \quad \dots\dots(40)$$

のように、(34)式に示す $\mathfrak{A}_c, \mathfrak{A}_s$ に対応して、実部と虚部に分解して記すことができる。ここに、横切断波形 $\zeta(x_c, y)$ を、

$$\zeta(x_c, y) \equiv \zeta_1(x_c, y) + \zeta_2(x_c, y) \quad \dots\dots(41)$$

のように、x軸に関して対称な波形 $\zeta_1$ と反対称な波形 $\zeta_2$ の合成として捉えれば、その性質から(40)式の積分は、半無限区間に亘る積分に書き換えることができ、結局Fourier変換 $\mathfrak{A}$ は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= 2 \lim_{Y_{\infty} \rightarrow 0} \int_0^{Y_{\infty}} \zeta_1(x_c, y) \cos(\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi) dy \\ &+ 2i \cdot \lim_{Y_{\infty} \rightarrow 0} \int_0^{Y_{\infty}} \zeta_2(x_c, y) \sin(\gamma_0 y \tan \phi \sec \phi) dy \end{aligned} \quad \dots\dots(42)$$

のように、第1項が対称波のcos変換、第2項が反対称波のsin変換として表され、後の解析の便を図って、

再び複素表示に書き戻せば、

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= 2 \operatorname{Re} \left[ \lim_{Y_{\infty} \rightarrow 0} \int_0^{Y_{\infty}} \zeta_1(x_c, y) e^{i \gamma_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \right] \\ &+ 2i \cdot \operatorname{Im} \left[ \lim_{Y_{\infty} \rightarrow 0} \int_0^{Y_{\infty}} \zeta_2(x_c, y) e^{i \gamma_0 y \tan \phi \sec \phi} dy \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(43)$$

と記すことができる。ここに、 $\operatorname{Re} [\dots]$ 、 $\operatorname{Im} [\dots]$ は、それぞれ $[\dots]$ 内の実部ならびに虚部を採るものとする。

一方、(41)式に現れる対称波 $\zeta_1$ 、反対称波 $\zeta_2$ は、前節の(31)式で定義した振幅関数の対称成分 $C_1, S_1$ と反対称成分 $C_2, S_2$ を用いて、 $y > 0$ なる右舷側( $0 \leq \theta \leq \pi$ )に対しては、(1)式を(41)式に従って分解した形で、各々

$$\begin{aligned} \zeta_j(x_c, y) &\sqrt{\frac{x_c^2 + y^2}{x_c^2 + y^2} \gg 1} \int_{-\frac{\pi}{2} + \theta}^{\frac{\pi}{2}} \{ C_j(\theta) \cos(\gamma_0 \varpi \sec^2 \theta) \\ &+ S_j(\theta) \sin(\gamma_0 \varpi \sec^2 \theta) \} d\theta \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{ただし、} \begin{cases} j=1: \text{対称波} \\ j=2: \text{反対称波} \end{cases} \end{array} \quad \dots\dots(44)$$

のように表される。したがって、(43)式のFourier変換 $\mathfrak{A}$ は、第2章の(14)式または(24)式を用いることによって、直ちに

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \frac{2\pi}{\gamma_0 \sec \phi (2 \sec^2 \phi - 1)} \cdot \\ &\times \left[ \operatorname{Re} [ e^{i \gamma_0 x_c \sec \phi} \cdot \{ C_1(-\phi) - i S_1(-\phi) \} ] \right. \\ &\left. + i \cdot \operatorname{Im} [ e^{i \gamma_0 x_c \sec \phi} \cdot \{ C_2(-\phi) - i S_2(-\phi) \} ] \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(45)$$

のように計算でき、対称波を表す第1項には下添字1を、反対称波を表す第2項には下添字2を付したものである。そこで、(45)式の二重大括弧内を各々 $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ に従って展開し、振幅関数の対称・反対称性を利用して引数を $-\phi$ から $\phi$ に転換して記せば、結局Fourier変換 $\mathfrak{A}$ として、前節(30)式と同一の結果に到達できることから、従来型の横切断法の算式が、本論で提案した結果を用いることによって、簡単に導かれることが分かった。このように、従来型の横切断法の基礎を成す波形のFourier変換 $\mathfrak{A}$ は、yに関する積分を(40)式のように左右両舷に亘って行っているため、(14)式を導く際には用いた情報の半分を、その対称・反対称性から(42)式のように捨てることになり、結果として2横断面での計測を余儀なくされていた。

以上のことから、本論第2章において1横断面での解析から振幅関数の決定が可能(15),(17)式の関係

導き得たのは、横切断波形に対するFourier変換を従来型のように左右両舷に亘って1度に施すのではなく、それを対称面を境に左右両舷に分割し各々の片舷内に留めたからであり、最終的に両者の解析式に現れる差異は、波形のFourier変換の作り方から生じていたことが分かる。

5. 本論で開発した1横断面法と従来からの2横断面法との比較・検討

本章では、理論的にC<sub>1</sub>波のみを生成するPoint Sourceを例に取り、本論で開発した1横断面法((15)式)と従来からの2横断面法(x<sub>c</sub><sup>(2)</sup> = 2x<sub>c</sub><sup>(1)</sup>とした(38)式)の2種類のFourier変換法を適用して解析を行い、両者を比較・検討するとともに、得られた結果の漸近特性について考察を加える。

5.1 Point Source

原点oの直下z = -fなる点に置かれた単一の吹き出しに、一樣な流れが当る時に生成される自由波の振幅関数は、

$$\left. \begin{aligned} C_1(\theta) &= \frac{\gamma_0}{4} e^{-\gamma_0 f \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ S_1(\theta) &= 0 \\ C_2(\theta) = S_2(\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

のように単純な形で与えられ、C(θ)の対称成分であるC<sub>1</sub>波のみから構成されている。この式は、附録(C-1)式において、強さσを(C-5)式からσ = 1/16 U<sub>∞</sub>D<sup>2</sup>と規定した後、Sourceが表す半無限長物体の下流での円盤径Dを規準に無次元化して得られたものである。

5.2 振幅関数

Fig.9は両解析法によって得られた振幅関数の比較であり、γ<sub>0</sub> = f = 1の場合を示す。ここに、右側(θ > 0)が本論で提案する1横断面法による解析結果であり、

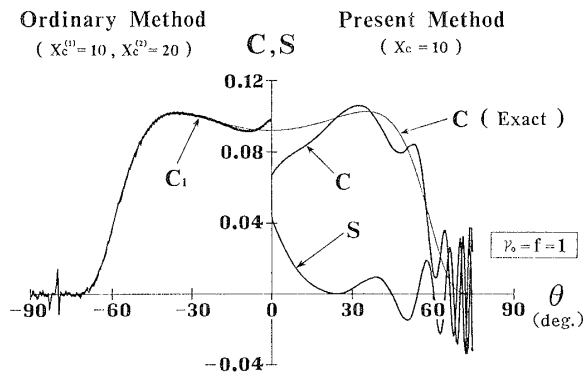


Fig.9 Comparison of wave amplitude functions analyzed by between present and ordinary method at the cut of x<sub>c</sub> = 10 and x<sub>c</sub><sup>(1)</sup> = 10, x<sub>c</sub><sup>(2)</sup> = 20 for a point source

のため左側(θ < 0)に折り返して示すのが従来の2横断面法による結果である。このときの切断面はx<sub>c</sub> = x<sub>c</sub><sup>(1)</sup> = 10であり、従来の方法はその倍のx<sub>c</sub><sup>(2)</sup> = 20における波形も必要とする。左右両者の振幅関数の比較から、まず本論の方法による結果を見ると、波形の解析から得られたC波(太線)はやや波打ちは激しいものの元々のC波((46)式を細線で描画したもの)を概ね再現できているようであり、また同様なS波(太線)もC波に比べてかなり小さく得られており、元々SourceにはS波は存在しないという素成波の位相特性についても説明できているようである。ただし、ここでもDoubletに対するFig.5と同様、θ = 0の付近では解析の精度が落ちるようである。これに対し、左側に示す従来の2横断面法によるC<sub>1</sub>波は、元々のC波と殆ど一致しており、θ = 0近傍の誤差も小さいようである。このように、予めS<sub>1</sub> = 0と置けるような素成波の位相特性が知られている特殊な場合には、従来の方法においてx<sub>c</sub><sup>(2)</sup> = 2x<sub>c</sub><sup>(1)</sup>とした解析法は、本論の方法よりも高精度の再現性を見せるようである。

5.3 造波抵抗ならびに考案

Fig.10は、両解析法によるFroude数ベースの造波抵抗値C<sub>xw</sub>を比較したものであり、解析はFig.9と同一の断面で行っており、同様に没水深度f = 1に対する結果である。この図から両者を比較すると、従来の方法によって解析した造波抵抗値は、高速域では細線で示す厳密解(附録(C-6)式を用いて描画したもの)と若干の差異が認められるものの、計測断面をこの程度の位置に選んでも大部分の速度域において厳密解を良好に説明できている。ここに、上述の高速域における推定誤差は、Froude数が高くなるとKelvin Angleより側方にも相当の範囲に亘って緩やかな減衰で波高が存在するため、これをFourier変換する際の打ち切り点が近過ぎたことによるものと考えられる。一方、本

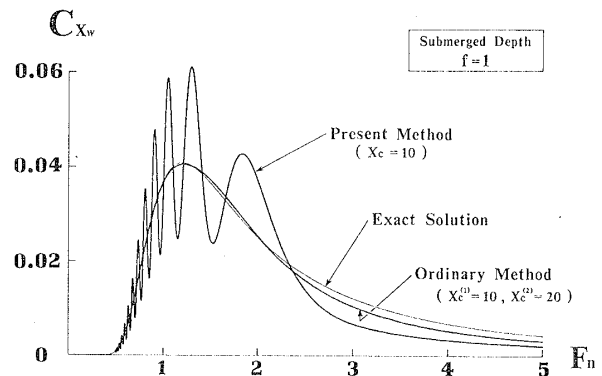


Fig.10 Comparison of wave making resistance C<sub>xw</sub> versus Froude's number analyzed by between present and ordinary method at the cut of x<sub>c</sub> = 10 and x<sub>c</sub><sup>(1)</sup> = 10, x<sub>c</sub><sup>(2)</sup> = 20 for a point source

論の方法によって解析された結果には、特に低速域において厳密解には見られない激しいハンプ・ホローが生じており、少なくともこの程度の断面で解析を行う限り、造波抵抗値の推定には不十分なようである。

そこで、切断面を5倍ほど下流側に移動させ ( $x_c = 50$  &  $x_c^{(1)} = 50, x_c^{(2)} = 100$ )、同様な解析を行って得られた  $C_{xw}$  曲線を Fig.11 に示す。この図を見ると、断面をこの程度遠方を取れば、本論の方法による結果も先程の場合に比べてハンプ・ホローもかなり押さえられ、平均的には厳密解を説明できる程度になっている。一方、従来の方法による造波抵抗値は、Fig.10より更に精度が増して、図で見る限り全速度域に亘って厳密解(細線)と完全に一致している。このように同程度の断面

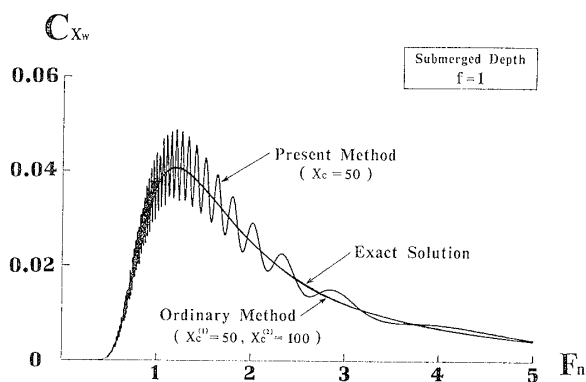


Fig.11 Comparison of wave making resistance  $C_{xw}$  versus Froude's number analyzed by between present and ordinary method at the cut of  $x_c^{(1)} = 50$  and  $x_c^{(2)} = 100$  for a point source

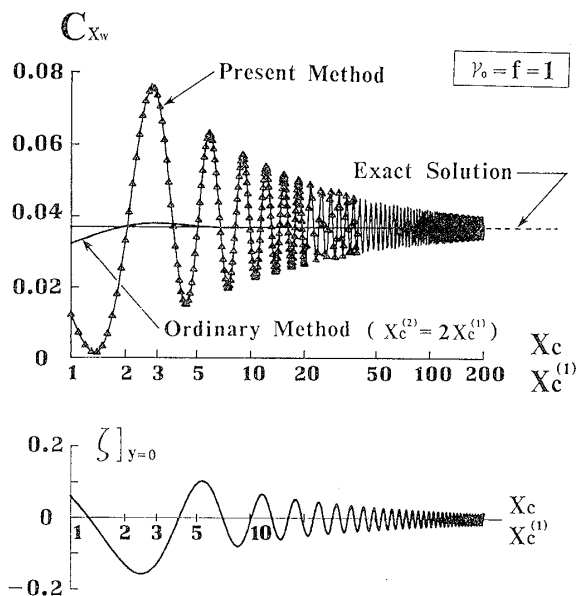


Fig.12 Comparison on dependence of wave making resistance  $C_{xw}$  analyzed by between present and ordinary method upon the transverse cutting position  $x_c$  &  $x_c^{(1)}$  for a point source

で解析を行えば、本論の方法は従来の方法に比して、十分な解析精度を得ることは難しいようである。

Fig.12は、第3章でDoubletに対して行ったと同様に、両解析法によって得られた造波抵抗値  $C_{xw}$  の切断位置に対する依存性を比較したものであり、 $\gamma_0 = f = 1$  の場合を示す。ここに図の横軸には、Fig.8と同様、切断位置  $x_c$  の対数を取ってグラフ化しており、従来の2横断面法の場合はSourceに近い方の断面  $x_c^{(1)}$  を基準にしている。この比較図を見ると、太い実線で示す従来の2横断面法による結果は、 $x_c^{(1)}$  の増加に伴って速やかに真の値に近づくのに対し、三角印を結んだ本論で開発した1横断面法は、Doubletの場合と同様、切断面  $x_c$  の選択に伴う変動が激しく、下に描画した中心線上での縦切断波形  $[\eta]_{y=0}$  との相関も認められないから、やはり真の造波抵抗値を得るには切断面を船から相当離れた位置に選ぶ必要が生じ、この図で見る限り、従来の方法に比べて見劣りするとは否定できない。

ここに、4.2節で示したように従来型の解析式(30)が本論で提案する漸近解(14)から導き得ることから、本論の方法は従来の方法を包含し且つ採用した仮定も同一であると考えられるにも拘わらず、両者によって解析された造波抵抗値  $C_{xw}$  の切断位置  $x_c$  に対する漸近特性に大きな差が生じた(Fig.12)のは、波形の段階で予め  $x_c \gg 1$  の近似を行い偏角を  $\theta \rightarrow 0$  で固定した場合について論ずれば、従来型の無限区間に亘るFourier変換  $\mathcal{X}$  を求めるには、その後  $x_c \gg 1$  の近似を必要とせず、 $\theta = 0$  近傍でも数学的に何ら問題を生じない(4.1節(28)式  $\rightarrow$  (30)式)のに対し、本論の方法に用いる半無限区間のFourier変換  $\mathcal{X}$  は、再度  $x_c \gg 1$  の近似を適用して  $\theta = 0$  近傍を除外した領域に対し漸近的に得られている(2.3節(21)式  $\rightarrow$  (24)式)ことに起因すると考えられる。その意味で本論で提案する解析式(15),(17)は、従来型の算式(35),(36)に比して  $x_c \gg 1$  に対する近似が1段階多く、結果として  $\theta = 0$  近傍における素成波振幅の推定精度を劣下させることになり、ひいては造波抵抗曲線のFroude数や  $x_c$  に関する激しいハンプ・ホローとなって現れたものと推察される。

しかし、ここで付言したいのは、(38),(39)式に示す  $x_c^{(2)} = 2x_c^{(1)}$  での2横断面解析は4.1節でも述べたように、 $C_1, S_2$  に対しては有効であるが、 $S_1, C_2$  に対しては無効であるため、実測波形を解析する際には予め素成波の位相特性が知れているわけではないことから、たとえ流場の対称条件を課したにせよ  $S_1$  波が発散する問題が生じ、何らかの工夫を施さない限り、このままの形では実用には供さないということである。これに対し、本論で開発した手法は、船からある程度離れた横切断面で計測した1枚の波形記録さえあれば、それを単純にFourier変換することにより発散することのない振

幅関数を直ちに求め得るといふ、従来の手法に見られない利点を有している。従って、今後実際の水槽試験法へ上手に応用すれば、2枚以上の横切断波形を必要とした従来のFourier変換法に比して、計測の手間を大幅に減少させることを可能にするものであると考える。

## 6. 結 論

本論では、定常斜航する船の波に対する横切断波形解析法として、1枚の横切断波形を用いた新しいFourier変換型の手法を提案し、その特長を論ずるとともに、従来の手法との関連について考察したところ、次のような結論を得た。

(i) Fourier変換型の横切断波形解析法の算式として、(15)、(17)式に示すような縦切断法におけるNewman-Sharmaの式を横方向に転換した形のものを開発し、船の後方で計測した1枚の横切断波形を、中心線から左右両舷に向かって別個にFourier変換することにより、各々が逆舷側に伝播する素成波に対応して非対称流場における振幅関数を決定し得ることを示した。

(ii) 開発した手法を没水した単一の斜軸Doubletが生成する理論波形に適用し、計測断面を充分後方に取れば高精度に振幅関数を再現し得ることを検証するとともに、この解析法が斜航時の造波横力の推定に有効であることを示した。ただし、一様流方向に伝播する $\theta=0$ 近傍の素成波振幅に対する推定精度と有限な水槽幅に対する応用可能性については、今後の研究課題とする。

(iii) 従来型の横切断法において $x_c^{(2)}=2x_c^{(1)}$ とした解析法と本論で開発した手法の2種類のFourier変換法を適用してPoint Sourceの波を解析し、両者を比較・検討したところ、本論で提案する1横断面法を用いて信頼のある造波抵抗値を得るには、従来の2横断面法に比べて計測断面を後方に取る必要があることが分かった。

(iv) 横切断型の波形解析の算式を導くに当り、波形表示式の段階で $x_c \gg 1$ 近似を行い偏角を $\theta \rightarrow 0$ で固定してFourier変換を施しても、 $x_c \gg 1$ なる漸近値で論ずる限り、それを考慮した場合と同一の結果が得られることを数学的に示し、縦切断法に対する $y_c \gg 1$ 近似<sup>3)</sup>の場合とは偏角に対する依存度が異なることを指摘した。

終わりに臨み、本研究を進めるに当り当初から熱心な御討論と温かい御激励を賜りました大阪大学工学部船舶海洋工学科教授 田中一郎先生に深甚なる感謝の意を捧げます。また、本稿を取り纏めるに際し、九州大学応用力学研究所津屋崎海洋災害実験所々長 本地弘之教授、同研究所海中作動力学部門 小寺山

亘教授ならびに同実験所 安部哲二事務官には幾多の御配慮を戴きました。ここに記して、篤く御礼申し上げます。なお、第3章、第5章の計算ならびに解析には、同研究所津屋崎地区データ処理用コンピュータシステムFACOM M-320Eを使用したことを付記し、関係各位に謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Newman, J. N. : The Determination of Wave Resistance from Wave Measurements along a Parallel Cut, Proceedings of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Vol. I, Univ. of Michigan, Ann Arbor (昭38), pp.351~379.
- 2) Sharma, S. D. : A Comparison of the Calculated and Measured Free-Wave Spectrum of an Inuid in Steady Motion, Proceedings of the International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Vol. I, Univ. of Michigan, Ann Arbor (昭38), pp.201~270.
- 3) 堀 勉, 田中一郎, 吉澤正純: 斜航する船の波に対する縦切断波形解析法について—Newman-Sharma法の非対称流場への拡張—, 西部造船会々報, 第77号(平成元年3月), pp.29~50.
- 4) Eggers, K. W. H. : Über die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffsmodells durch Analyse seines Wellensystems, Teil 1 und 2, Schiffetechnik, Vol.9(昭37), Heft 46, pp.79~84, 85 and Vol. 10 (昭38), Heft 52, pp.93~106.
- 5) Eggers, K. W. H., Sharma, S. D. & Ward, L. W. : An Assessment of Some Experimental Methods for Determining the Wavemaking Characteristics of a Ship Form, Trans. of S. N. A. M. E., Vol.75(昭42), pp.112~157.
- 6) Wehausen, J. V. & Laitone, E. V. : Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, Fluid Dynamics III, Springer-Verlag(昭35), pp.446~778.
- 7) 西山哲男: 斜行する没水回転楕円体並に水上船舶の横抵抗について, 造船協会論文集, 第85号(昭27), pp.17~27
- 8) Havelock, T. H. : Wave Resistance, Proceedings of Royal Society, Vol.118, Series A, London (昭3), pp.24~35.

【附録A】運動量定理による造波横力公式の導出

従来、船が斜航する場合の流体力については、主に船体表面に作用する圧力を積分する方法が採用されてきた経緯があり、造波現象と船体に働く流体力との関係は、それほど直截的に述べられてきたわけではないから<sup>7)</sup>西田, 6) Wehausen & Laitone, ここでは通常の造波抵抗を求める場合に倣い、運動量定理によって造波横力公式を導き、波形解析等によって得られた左右非対称な振幅関数から直ちに造波横力を算出することを可能にする。

A.1 運動量定理

自由表面を有する定常な流れの中に船が置かれている時、船体の浸水表面 $A_H$ , 自由表面 $A_F$ , 検査面 $A_\infty$ で取り囲まれた流体の全領域 $V$ に亘って、非粘性流れに対するEulerの運動方程式を

$$\iiint_V [\rho(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} + \nabla p + \rho g \mathbf{k}] dV = \mathbf{0} \quad (A-1)$$

のように体積分する。ここに、 $\mathbf{q} = q_x \mathbf{i} + q_y \mathbf{j} + q_z \mathbf{k}$ は流速ベクトル、 $p$ は流体圧であり、 $g$ は重力加速度、 $\rho$ は非圧縮性を仮定した流体密度を表すものとする。また、 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ はHamiltonの演算子であり、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は各々Fig.1に示すデカルト座標の $x, y, z$ 方向の基本ベクトルである。ただし、ここでは本論のような無次元化を行うことなく、次元付きの物理量を用いて以下の解析を進めることにする。

さて、(A-1)式の対流項 $(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q}$ は、流場の連続条件 $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ から

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = [\nabla \cdot (q_x \mathbf{q})] \mathbf{i} + [\nabla \cdot (q_y \mathbf{q})] \mathbf{j} + [\nabla \cdot (q_z \mathbf{q})] \mathbf{k} \quad \dots\dots (A-2)$$

のように変形できるから、Gaussの発散定理を適用することによって、(A-1)式の体積分は

$$\iiint_{A_H + A_F + A_\infty} [\rho q_n \mathbf{q} + p \mathbf{n}] dA - \rho g V \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \dots\dots (A-3)$$

のように、面積分に変換される。ここに、 $\mathbf{n} = (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k})$ は、境界面上に立てた単位法線ベクトルであり、領域 $V$ の内部に向かうものとし、 $q_n (= \mathbf{q} \cdot \mathbf{n})$ は、その法線方向の流速成分を表す。また、大気圧 $p_0$ は、境界面全域に亘って一様に作用することから、面積分に対する寄与は消失し、(A-3)式においては、圧力 $p$ として $p - p_0$ なるゲージ圧力を用いれば充分である。

このとき、自由表面 $A_F$ では明らかに $q_n = p = 0$ であるから、(A-3)式に対する $A_F$ からの寄与が消失することや、船体表面 $A_H$ でも $q_n = 0$ を満たすことを用いて、(A-3)式を、船体に働く流体力  $\mathbf{F} (= X_w \mathbf{i} + Y_w \mathbf{j} +$

$Z_w \mathbf{k})$ を求め得る式に書き換えると、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \iint_{A_H} p \mathbf{n} dA \\ &= \iint_{A_\infty} [\rho q_n \mathbf{q} + p \mathbf{n}] dA - \rho g V \mathbf{k} \quad \dots\dots (A-4) \end{aligned}$$

となり、自由表面を有する場合の運動量の定理が導かれたことになる。この式は、複雑な水面上での積分を行うことなく、検査面での情報のみから流体力を知り得る形となっており、次節以降の解析には好都合である。また、右辺第2項は、基本ベクトル $\mathbf{k}$ が示すように、検査面内に充満する流体体積 $V$ によって鉛直下向きに生ずる重力項であり、少なくとも造波抵抗や造波横力など水平面内の流体力を求める際には関与しない。

A.2 造波横力ならびに造波抵抗

本節では、Fig.Aに示すように、船を大きな直方体

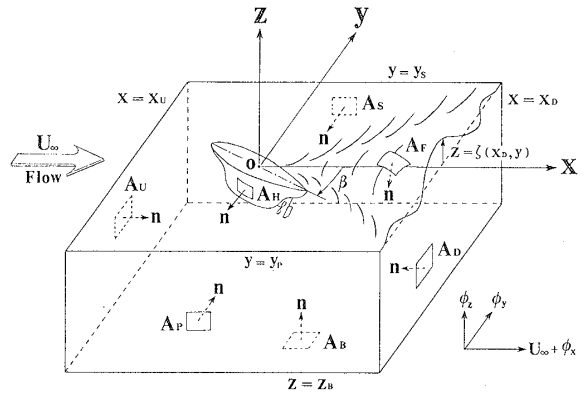


Fig.A Control surface surrounding ship hull in order to apply the momentum theorem

の検査面 $A_\infty$ で取り囲み、造波横力 $Y_w$ に対する具体的な表示式を、造波抵抗 $X_w$ と併せて統一的に求める。

このとき、前節で一般的な検査面として捉えてきた $A_\infty$ が、自由表面 $A_F$ を除く直方体の5面から構成されることになり、各々を $A_U$ (上流)、 $A_D$ (下流)、 $A_P$ (左舷)、 $A_S$ (右舷)、 $A_B$ (底面)と記すことにする。また、流場の非回転性を仮定することにより、攪乱流に対して速度ポテンシャル $\phi$ を導入し、以下の解析の便を図って、流速ベクトル $\mathbf{q}$ を一様流と攪乱流に分離して記せば、

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= U_\infty \mathbf{i} + \nabla \phi \\ &= (U_\infty + \phi_x) \mathbf{i} + \phi_y \mathbf{j} + \phi_z \mathbf{k} \quad \dots\dots (A-5) \end{aligned}$$

となる。ここに、 $\phi$ に対する下添字は、その方向に偏微分することを示す。一方、遙か上流( $x \rightarrow -\infty$ )の静止水面( $z=0$ )上では、攪乱がなく $p = \phi_x = \phi_y = \phi_z = 0$ であることから、ゲージ流体圧 $p$ はBernoulliの定理の教えるところにより、流体運動が非回転的である限り

$$\frac{p}{\rho} = -gz - U_\infty \phi_x - \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2} \dots\dots(A-6)$$

のように、攪乱流に依存した形で求まる。

したがって、(A-5)、(A-6)式を運動量定理の式(A-4)に代入し、そのj成分を取ることにより、造波横力Y<sub>w</sub>は

$$Y_w = \rho \iint_{A_D + A_U + A_S + A_P + A_B} \left[ q_n \phi_y - \left( gz + U_\infty \phi_x + \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2} \right) n_y \right] dA \dots\dots(A-7)$$

から算出できることになる。そこで、各々の検査面での座標を下添字のD,U,S,P,Bで示し、波高をz=ζ(x,y)として、(A-7)式を積分範囲を明記の上、検査面毎に書き下すと、A<sub>D</sub>, A<sub>U</sub>, A<sub>B</sub>上ではn<sub>y</sub>=0だから第2項の圧力項は消失し、

$$\begin{aligned} \frac{Y_w}{\rho} = & - \int_{y_P}^{y_S} dy \int_{z_B}^{\zeta(x_D, y)} [U_\infty \phi_y + \phi_x \phi_y]_{x=x_D} dz \\ & + \int_{y_P}^{y_S} dy \int_{z_B}^{\zeta(x_U, y)} [U_\infty \phi_y + \phi_x \phi_y]_{x=x_U} dz \\ & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{z_B}^{\zeta(x, y_S)} \left[ gz + U_\infty \phi_x + \frac{\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2}{2} \right]_{y=y_S} dz \\ & - \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{z_B}^{\zeta(x, y_P)} \left[ gz + U_\infty \phi_x + \frac{\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2}{2} \right]_{y=y_P} dz \\ & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{y_P}^{y_S} [\phi_y \phi_z]_{z=z_B} dy \dots\dots(A-8) \end{aligned}$$

となる。ここに、攪乱流φ<sub>x</sub>, φ<sub>y</sub>, φ<sub>z</sub>ならびに水面変位ζを1次の微小量とし、(A-8)式においてz方向の積分区間をz=0の静水面を境に大部分の静水域(z<sub>B</sub> ≤ z ≤ 0)と水面の変位域(0 ≤ z ≤ ζ)に分離することにより、精確に2次の項まで拾い上げる。このとき、zの静水域に対しては、静水圧gzに関する2項は明らかに相殺するし、U<sub>∞</sub>φ<sub>x</sub>, U<sub>∞</sub>φ<sub>y</sub>に対する4項も、xあるいはyに関する積分演算の結果、速度ポテンシャルφの値として相殺することになる。したがって、造波横力Y<sub>w</sub>は、2次の項から生ずることとなり、

$$\begin{aligned} \frac{Y_w}{\rho} = & - \int_{z_B}^0 dz \int_{y_P}^{y_S} [\phi_x \phi_y]_{x=x_D} - [\phi_x \phi_y]_{x=x_U} dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{z_B}^0 dz \int_{x_U}^{x_D} [\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2]_{y=y_S} - [\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2]_{y=y_P} dx \\ & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{y_P}^{y_S} \phi_y \phi_z \Big|_{z=z_B} dy \\ & - U_\infty \int_{y_P}^{y_S} [\phi_y(x_D, y, 0) \cdot \zeta(x_D, y) - \phi_y(x_U, y, 0) \cdot \zeta(x_U, y)] dy \\ & + U_\infty \int_{x_U}^{x_D} [\phi_x(x, y_S, 0) \cdot \zeta(x, y_S) - \phi_x(x, y_P, 0) \cdot \zeta(x, y_P)] dx \end{aligned}$$

$$+ \frac{g}{2} \int_{x_U}^{x_D} [\zeta^2(x, y_S) - \zeta^2(x, y_P)] dx \dots\dots(A-9)$$

から計算される。ここに、単積分で表示される後半3項は、先の静水域に対しては消失した各々U<sub>∞</sub>φ<sub>y</sub>, U<sub>∞</sub>φ<sub>x</sub>, gz, に関して、水面変位の寄与から生じたものである。一方水面変位ζは、Bernoulliの定理から、1次の範囲では攪乱流φ<sub>x</sub>と

$$\zeta(x, y) = -\frac{1}{\kappa_0 U_\infty} \phi_x(x, y, 0) + \dots\dots \dots(A-10)$$

ただし、κ<sub>0</sub> =  $\frac{g}{U_\infty^2} = \frac{\gamma_0}{L}$  (波数)

の関係にあるから、(A-9)式の後半3項から水面変位量ζを消失し、全て攪乱流で表示すれば

$$\begin{aligned} \frac{Y_w}{\rho} = & - \int_{z_B}^0 dz \int_{y_P}^{y_S} [\phi_x \phi_y]_{x=x_D} - [\phi_x \phi_y]_{x=x_U} dy \\ & + \frac{1}{2} \int_{z_B}^0 dz \int_{x_U}^{x_D} [\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2]_{y=y_S} - [\phi_z^2 + \phi_x^2 - \phi_y^2]_{y=y_P} dx \\ & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{y_P}^{y_S} \phi_y \phi_z \Big|_{z=z_B} dy \\ & + \frac{1}{\kappa_0} \int_{y_P}^{y_S} [\phi_x \phi_y]_{x=x_D} - [\phi_x \phi_y]_{x=x_U} \Big|_{z=0} dy \\ & - \frac{1}{2\kappa_0} \int_{x_U}^{x_D} [\phi_x^2]_{y=y_S} - [\phi_x^2]_{y=y_P} \Big|_{z=0} dx \dots\dots(A-11) \end{aligned}$$

となる。(A-11)式は、検査面を(A-10)式の線型理論が成立する程度遠方に選べば、そこでの流速分布から造波横力Y<sub>w</sub>を知り得る形となっている。

他方、造波抵抗X<sub>w</sub>も、(A-4)式のi成分を取ることによって

$$X_w = \rho \iint_{A_D + A_U + A_S + A_P + A_B} \left[ q_n (U_\infty + \phi_x) - \left( gz + U_\infty \phi_x + \frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2} \right) n_x \right] dA \dots\dots(A-12)$$

から計算できるはずである。このとき、A<sub>S</sub>, A<sub>P</sub>, A<sub>B</sub>上ではn<sub>x</sub>=0だから圧力項は消失し、検査面毎に一樣流速U<sub>∞</sub>を因数に持つ項と持たない項に分離して記せば、

$$\begin{aligned} \frac{X_w}{\rho} = & - \int_{y_P}^{y_S} dy \int_{z_B}^{\zeta(x_D, y)} [U_\infty (U_\infty + \phi_x) - gz - \frac{\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2}{2}]_{x=x_D} dz \\ & + \int_{y_P}^{y_S} dy \int_{z_B}^{\zeta(x_U, y)} [U_\infty (U_\infty + \phi_x) - gz - \frac{\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2}{2}]_{x=x_U} dz \\ & - \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{z_B}^{\zeta(x, y_S)} [U_\infty \phi_y + \phi_x \phi_y]_{y=y_S} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{z_B}^{\zeta(x, y_P)} [U_\infty \phi_y + \phi_x \phi_y]_{y=y_P} dz \\
 & + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{y_P}^{y_S} [U_\infty \phi_z + \phi_z \phi_x]_{z=z_B} dy \\
 & \dots\dots(A-13)
 \end{aligned}$$

となる。ここに、検査面毎の大括弧内の第1項を加えて一様流速 $U_\infty$ で除したものは、検査面内への流体の流入量を表すから、流場の連続条件から明らかにゼロとなる。次に、 $U_\infty$ を因数に持たない残りの項については、先程 $Y_w$ に対して行ったと同様にして、 $z$ の積分範囲を $z=0$ の静水面を境に2つに分けて考える。このとき、 $A_D$ 、 $A_U$ における静水圧 $gz$ の項は、静水域( $z_B \leq z \leq 0$ )に対しては相殺し、水面変位 $\zeta$ によって

$$\frac{g}{2} \int_{y_P}^{y_S} [\zeta^2(x_D, y) - \zeta^2(x_U, y)] dy \dots\dots(A-14)$$

のように、2次の流体力を生ずる。また、 $\phi_x^2$ 、 $\phi_x \phi_y$ 等、攪乱流の自乗項に対する水面変位の影響は更に高次となって無視できる。このようなことから、造波抵抗 $X_w$ もまた造波横力 $Y_w$ と同様に、2次の流体力として生ずることになり、

$$\begin{aligned}
 \frac{X_w}{\rho} &= \frac{1}{2} \int_{z_B}^0 dz \int_{y_P}^{y_S} \left[ \underbrace{[\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2]_{x=x_D}}_{z=0} \right. \\
 & \quad \left. - [\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2]_{x=x_U} \right] dy \\
 & \quad - \int_{z_B}^0 dz \int_{x_U}^{x_D} [\phi_x \phi_y]_{y=y_S} - [\phi_x \phi_y]_{y=y_P} dx \\
 & \quad + \int_{x_U}^{x_D} dx \int_{y_P}^{y_S} \phi_z \phi_x \Big|_{z=z_B} dy \\
 & \quad + \frac{1}{2\kappa_0} \int_{y_P}^{y_S} \left[ \underbrace{\phi_x^2}_{z=0} \Big|_{x=x_D} - \underbrace{\phi_x^2}_{z=0} \Big|_{x=x_U} \right] dy \\
 & \dots\dots(A-15)
 \end{aligned}$$

のように、検査面上の流速分布から求め得る。ここに単積分で表示される最終項は、水面変位からの寄与であり、(A-10)式の関係を用いて、(A-14)式からこれを消去したものである。

**A.3 造波流体力の振幅関数表示**

前節では、検査面として有限なものを想定し、運動量の洩れのない形で、検査面上の流速分布から造波横力 $Y_w$ ならびに造波抵抗 $X_w$ を算定する公式を導いた。

本節では、検査面を無限に大きな直方体に引き延ばした極限について考える。このとき、 $A_D$ 、 $A_U$ は各々無限下流( $x_D \rightarrow +\infty$ )あるいは無限上流( $x_U \rightarrow -\infty$ )に、 $A_S$ 、 $A_P$ は各々Kelvin波の外縁よりも遙かに側方の無限右舷( $y_S \rightarrow +\infty$ )あるいは無限左舷( $y_P \rightarrow -\infty$ )に、 $A_B$ は無限水深( $z_B \rightarrow -\infty$ )に移り、船(換言すれば座標原

点)からの距離を $R$ とするとき、下流境界 $A_D$ にはKelvin波が伝播していることから攪乱流の減衰が $|\nabla \phi| = O(1/\sqrt{R})$ であるのに対し、他の境界 $A_U$ 、 $A_S$ 、 $A_P$ 、 $A_B$ 上での攪乱流の挙動はRankine Source的であるから高々 $|\nabla \phi| = O(1/R^2)$ である。したがって、検査面として無限に大きな直方体を採用した場合、(A-11)式及び(A-15)式において、境界面 $A_U$ 、 $A_S$ 、 $A_P$ 、 $A_B$ からの寄与は全く消滅し、結局、波線を施した下流境界 $A_D$ での情報のみから、造波横力 $Y_w$ ならびに造波抵抗 $X_w$ が決定されることになり、それぞれに対して

$$Y_w = -\rho \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x \phi_y \Big|_{x=\infty} dy + \frac{\rho}{\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x \phi_y \Big|_{z=0} dy \dots\dots(A-16)$$

$$\begin{aligned}
 X_w &= \frac{\rho}{2} \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} [\phi_y^2 + \phi_z^2 - \phi_x^2]_{x=\infty} dy \\
 & \quad + \frac{\rho}{2\kappa_0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x^2 \Big|_{z=0} dy \dots\dots(A-17)
 \end{aligned}$$

なる公式を得る。

さて、(A-16)、(A-17)両式にはKelvin Sourceの自由波に相等する攪乱流のみが寄与することから、速度ポテンシャル $\phi$ は、 $x \rightarrow \infty$ の漸近形で(19)式に対応した形として

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} & U_\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{C(\theta) \sin(\kappa_0 \omega \sec^2 \theta) \\
 & - S(\theta) \cos(\kappa_0 \omega \sec^2 \theta)\} \cdot e^{\kappa_0 z \sec^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
 & \dots\dots(A-18)
 \end{aligned}$$

のように表記される。ここに、振幅関数 $C(\theta)$ 、 $S(\theta)$ を(31)式に示すように $\theta$ に関して対称な成分 $C_1$ 、 $S_1$ と反対称な成分 $C_2$ 、 $S_2$ に、 $\omega$ を(3)式に従って $x$ 成分と $y$ 成分に分解することにより積分区間を半分に戻せば、攪乱ポテンシャル $\phi$ は

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} & 2U_\infty \int_0^{\pi/2} e^{\kappa_0 z \sec^2 \theta} \cos \theta d\theta \\
 & \times \left[ \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & C_1(\theta) \sin(\kappa_0 x \sec \theta) \\ & - S_1(\theta) \cos(\kappa_0 x \sec \theta) \end{aligned} \right\} \cdot \cos(\kappa_0 y \tan \theta \sec \theta) \\ & + \left\{ \begin{aligned} & C_2(\theta) \cos(\kappa_0 x \sec \theta) \\ & + S_2(\theta) \sin(\kappa_0 x \sec \theta) \end{aligned} \right\} \cdot \sin(\kappa_0 y \tan \theta \sec \theta) \end{aligned} \right] d\theta \\
 & \dots\dots(A-19)
 \end{aligned}$$

のように、 $y$ を引数に持ち、 $\theta$ に関してFourier変換した形に書き表すことができる。この速度ポテンシャル $\phi$ を(A-16)、(A-17)両式に代入して $y$ に関する積分を実行するに際し、Fourierの重複積分定理より導かれる次のような積分公式を思い浮かべよう。

すなわち、Parsevalの等式として、一般に $f(y)$ ,  $g(y)$ が

$$\left. \begin{aligned} f(y) &= \int_0^\infty \{F_1(\kappa)\cos(\kappa y) + F_2(\kappa)\sin(\kappa y)\} d\kappa \\ g(y) &= \int_0^\infty \{G_1(\kappa)\cos(\kappa y) + G_2(\kappa)\sin(\kappa y)\} d\kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots(A-20)$$

のように、 $\kappa$ に関するFourier変換の形で与えられるとき、その積の $y$ に関する無限区間に亘る積分値は、

$$\int_{-\infty}^\infty f(y)g(y)dy = \pi \int_0^\infty \{F_1(\kappa)G_1(\kappa) + F_2(\kappa)G_2(\kappa)\} d\kappa \dots(A-21)$$

のように、 $\kappa$ に関する単積分の形で求まることが知られている。ここに、 $F_1, G_1$ は $\kappa$ について対称な成分であり、 $F_2, G_2$ は逆に反対称な成分である。

今、(A-19)式において、 $\kappa = \kappa_0 \tan \theta \sec \theta$ と置いて積分変数を $\theta$ から $\kappa$ に変換すると、 $d\theta = d\kappa / \{\kappa_0 \times \sec^2 \theta (2\sec^2 \theta - 1)\}$ となって、攪乱ポテンシャル $\phi$ は(A-20)式に示す形となるから、その $x, y, z$ に関する微係数 $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ を(A-16)式あるいは(A-17)式に代入すれば、各項の $y$ に関する積分は、(A-21)式に示す公式から容易に評価できる。冗長な算術演算の後、結果は検査面の前後位置 $x$ には依存しない形となり、深さ方向 $z$ のみの関数となる。ここに、 $z$ に関する挙動は(A-19)式が示すように指数関数的であるから、半無限区間( $-\infty < z \leq 0$ )に亘る積分も簡単に行え、最終的に $\kappa$ に関する単積分の形で得られた結果を、再び変数を元の $\theta$ に置き戻して記述すれば、(A-16)式から造波横力 $Y_w$ に対する公式として

$$\begin{aligned} Y_w &= 2\pi\rho U_\infty^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [C_1(\theta)C_2(\theta) + S_1(\theta)S_2(\theta)] \cdot \\ &\quad \times \sin\theta \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho U_\infty^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \cdot \\ &\quad \times \tan\theta \cos^3\theta d\theta \dots\dots(A-22) \end{aligned}$$

を得る<sup>6)Eq. (20.37)</sup>。この式は波形解析その他によって自由波の振幅関数 $C(\theta), S(\theta)$ さえ求めれば、直ちに横力 $Y_w$ を算出し得る形となっており、附録Aでの目的は達成されたと言える。

一方、造波抵抗 $X_w$ に対する公式は、Parsevalの等式(A-21)において $f(y)=g(y)$ と考えることにより、(A-17)式から、

$$\begin{aligned} X_w &= \pi\rho U_\infty^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\{C_1(\theta)\}^2 + \{C_2(\theta)\}^2 + \{S_1(\theta)\}^2 \\ &\quad + \{S_2(\theta)\}^2] \cdot \cos^3\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\pi\rho U_\infty^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \cdot \\ &\quad \times \cos^3\theta d\theta \dots\dots(A-23) \end{aligned}$$

のように求まり、良く知られた結果である<sup>6)Eq. (20.37)</sup>。

ここに、(A-22)式と(A-23)式を見比べると、造波横力 $Y_w$ の被積分関数は、造波抵抗 $X_w$ の被積分関数である重率振幅関数の自乗と $\tan \theta$ の積になっているから、 $X_w$ が決して負にならないのに対し、 $Y_w$ は振幅関数の $\theta$ に関する非対称性の度合いによって正值にも負値にも成り得ることが分かる。なお、実用の便を図って、 $Y_w, X_w$ を共に $\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L^2$ で除すことにより、通常の意味での造波横力係数 $C_{Y_w}$ ならびに造波抵抗係数 $C_{X_w}$ を、それぞれ

$$\begin{aligned} C_{Y_w} &\equiv \frac{Y_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L^2} \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \cdot \tan\theta \cos^3\theta d\theta \dots\dots(A-24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{X_w} &\equiv \frac{X_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 L^2} \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\{C(\theta)\}^2 + \{S(\theta)\}^2] \cdot \cos^3\theta d\theta \dots\dots(A-25) \end{aligned}$$

のように表記しておく。ただし、(A-24), (A-25)両式に現れる $C(\theta), S(\theta)$ は各々船長 $L$ を規準に無次元化されたものであり、本論で言う振幅関数に相等する。

### 【附録B】単一の斜軸Doubletに働く造波横力ならびに造波抵抗

附録Bでは自由表面を有する一様な流れ $U_\infty i$ の中、原点 $o$ の水面直下で没水深度 $f$ の点 $(0, 0, -f)$ に置かれ、任意の方向 $\nu = li + mj + nk$ に軸を持つ強さ $\mu$ のPoint Doubletが受ける造波横力や造波抵抗を、附録Aにおいて運動量定理によって導出した公式を用いて算定することを目的とする。

このPoint Doubletによる攪乱速度ポテンシャル $\phi$ は、造波グリーン関数 $G = \frac{1}{r} + G'$ を導入することにより、

$$\begin{aligned} \phi &= \mu(\nu \cdot \nabla)G(x, y, z; 0, 0, -f) \\ &= \mu \left( l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+f)^2}} + G'(x, y, z-f) \right] \dots\dots(B-1) \end{aligned}$$

のような形で書き表すことができる。ここに、 $G'$ は

水面の攪乱影響を表す言わばグリーン関数の正則部分であり、複雑な重複積分で表示されるが<sup>6)Eq.(13.38)</sup>、その遠方( $\sqrt{x^2+y^2} \gg 1$ )での漸近挙動は、

$$G'_{\sqrt{x^2+y^2} \gg 1} \approx 4\kappa_0 \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0(z-f)\sec^2\theta} \sin(\kappa_0 \tilde{\omega} \sec^2\theta) \times \sec^2\theta d\theta \quad \dots\dots(B-2)$$

のような単積分の形で与えられることから、これによって生成される波紋 $\zeta_f$ の遠方での漸近形は、(A-10)式の関係から

$$\zeta_f = -\frac{1}{\kappa_0 U_\infty} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} \right]_{z=0} \approx \frac{4\kappa_0}{U_\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}+\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\kappa_0 f \sec^2\theta} \cos(\kappa_0 \tilde{\omega} \sec^2\theta) \times \sec^3\theta d\theta \quad \dots\dots(B-3)$$

のような自由波を表すことになる。ここに、(B-2)、(B-3)式は $y > 0$ なる右舷側に対する表示式であり、(2)式で定義される偏角 $\theta$ の範囲は $0 \leq \theta \leq \pi$ である。従って、方向余弦 $\nu(l, m, n)$ に軸を持つ斜軸Doubletに対する自由波の振幅関数 $C(\theta), S(\theta)$ は、(B-3)式を各々 $x, y, z$ 方向に偏微分し( $z$ については(B-2)式まで遡る。)第2章(1)式の形に整理することにより、

$$\left. \begin{aligned} C(\theta) &= -\frac{4\mu\kappa_0^2}{U_\infty} \cdot n e^{-\kappa_0 f \sec^2\theta} \sec^5\theta \\ &\equiv C_1(\theta) \\ S(\theta) &= \frac{4\mu\kappa_0^2}{U_\infty} \cdot (l + m \tan\theta) \cdot e^{-\kappa_0 f \sec^2\theta} \sec^4\theta \\ &\equiv S_1(\theta) + S_2(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-4)$$

のように求まり、S波が $l$ の掛かる対称成分 $S_1$ と $m \tan\theta$ の掛かる反対称成分 $S_2$ の合成として構成されるのに対し、C波は対称成分 $C_1$ のみから得られている。なお、Doubletの軸が水平面内にある限り $n=0$ となるから、C波は消失することになる。

そこで、(B-4)式のように得られた振幅関数 $C_1, S_1, S_2$ を、附録Aで導いた公式に代入すれば、直ちに斜軸Doubletに働く流体力を知ることができる。

まず、造波抵抗 $X_w$ は(A-23)第1式から、

$$X_w = 16\pi\rho\mu^2\kappa_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [l^2 + m^2 \tan^2\theta + n^2 \sec^2\theta] \times e^{-2\kappa_0 f \sec^2\theta} \sec^5\theta d\theta \\ \equiv 16\pi\rho\mu^2\kappa_0^4 \times [l^2 \mathfrak{D}_1(\kappa_0 f) + m^2 \mathfrak{D}_2(\kappa_0 f) + n^2 \mathfrak{D}_3(\kappa_0 f)] \quad \dots\dots(B-5)$$

と求まり、造波横力 $Y_w$ は(A-22)第1式から、

$$Y_w = 32\pi\rho\mu^2\kappa_0^4 \cdot lm \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\kappa_0 f \sec^2\theta} \tan^2\theta \sec^5\theta d\theta \\ \equiv 32\pi\rho\mu^2\kappa_0^4 \cdot lm \mathfrak{D}_2(\kappa_0 f) \quad \dots\dots(B-6)$$

のように計算される。ここに、上式中に現れる関数 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_1(\alpha) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\alpha \sec^2\theta} \sec^5\theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} e^{-\alpha} \int_1^\infty e^{-\alpha\xi} \cdot \frac{\xi^2 + 2\xi + 1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \\ \mathfrak{D}_2(\alpha) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\alpha \sec^2\theta} \tan^2\theta \sec^5\theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} e^{-\alpha} \int_1^\infty e^{-\alpha\xi} \cdot \frac{\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \\ \mathfrak{D}_3(\alpha) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\alpha \sec^2\theta} \sec^7\theta d\theta \\ &= \frac{1}{16} e^{-\alpha} \int_1^\infty e^{-\alpha\xi} \cdot \frac{\xi^3 + 3\xi^2 + 3\xi + 1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-7)$$

のように定義したものであって、後の解析の便を図り、 $\xi = 2\sec^2\theta - 1$ によって、変数を $\theta$ から $\xi$ に置換しておいた。

このとき、第2種の変形されたBessel関数が、

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x \cosh t - nt} dt \\ = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cdot \cosh nt dt \quad \dots\dots(B-8)$$

のように、積分表示されることを思い起こそう。ここに、 $\xi = \cosh t$ と置いて、変数を $t$ から $\xi$ に変換し、0次の $K_0(x)$ 、1次の $K_1(x)$ について書き下せば、

$$\left. \begin{aligned} K_0(x) &= \int_1^\infty e^{-x\xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \\ K_1(x) &= \int_1^\infty e^{-x\xi} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-9)$$

となり、(B-7)式と類似の積分形となる。この関係を利用することにより、 $K_0(x)$ の微係数 $K'_0(x), K''_0(x), K'''_0(x)$ は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} K'_0 & \\ K'_0(x) &= -K_1(x) \\ K''_0(x) &= K_0(x) + \frac{1}{x} K_1(x) \\ K'''_0(x) &= -\frac{1}{x} K_0(x) - \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) K_1(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-10)$$

のように、 $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ を用いて微係数を含まない形に表記できる。

したがって、(B-7)式で定義した関数 $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$ ,  $\mathfrak{D}_3$ は、0次及び1次の変形Bessel関数 $K_0, K_1$ を用いて、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}_1(\alpha) &= \frac{1}{8} e^{-\alpha} \cdot [K_0''(\alpha) - 2K_0'(\alpha) + K_0(\alpha)] \\ &= \frac{1}{4} e^{-\alpha} \cdot \left[ K_0(\alpha) + \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) K_1(\alpha) \right] \\ \mathfrak{D}_2(\alpha) &= \frac{1}{16} e^{-\alpha} \cdot \\ &\quad \times [-K_0''(\alpha) + K_0'(\alpha) + K_0'(\alpha) - K_0(\alpha)] \\ &= \frac{1}{16\alpha} e^{-\alpha} \cdot \left[ K_0(\alpha) + \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) K_1(\alpha) \right] \\ \mathfrak{D}_3(\alpha) &= \frac{1}{16} e^{-\alpha} \cdot \\ &\quad \times [-K_0'''(\alpha) + 3K_0''(\alpha) - 3K_0'(\alpha) + K_0(\alpha)] \\ &= \frac{1}{4} e^{-\alpha} \cdot \\ &\quad \times \left[ \left(1 + \frac{1}{4\alpha}\right) K_0(\alpha) + \left(1 + \frac{3}{4\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\right) K_1(\alpha) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-11)$$

のように記述することができる。(B-11)式で得られた結果を、(B-5), (B-6)両式に入れ戻すことにより、斜軸Doubletが受ける造波抵抗 $X_w$ は、

$$\begin{aligned} X_w &= 4\pi\rho\mu^2\kappa_0^4 e^{-\kappa_0 f} \cdot \\ &\quad \times \left[ l^2 \cdot \left\{ K_0(\kappa_0 f) + \left(1 + \frac{1}{2\kappa_0 f}\right) K_1(\kappa_0 f) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{4\kappa_0 f} \cdot \left\{ K_0(\kappa_0 f) + \left(1 + \frac{2}{\kappa_0 f}\right) K_1(\kappa_0 f) \right\} \right. \\ &\quad \left. + n^2 \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{4\kappa_0 f}\right) K_0(\kappa_0 f) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 + \frac{3}{4\kappa_0 f} + \frac{1}{2\kappa_0^2 f^2}\right) K_1(\kappa_0 f) \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots(B-12)$$

のように求まり<sup>8)Havelock, 7)西山</sup>。一方、造波横力 $Y_w$ は、

$$\begin{aligned} Y_w &= 2\pi\rho\mu^2 \frac{\kappa_0^3}{f} e^{-\kappa_0 f} \cdot lm \cdot \\ &\quad \times \left\{ K_0(\kappa_0 f) + \left(1 + \frac{2}{\kappa_0 f}\right) K_1(\kappa_0 f) \right\} \dots(B-13) \end{aligned}$$

の形で得られる<sup>7)西山</sup>。この(B-12)式から、横力の値 $Y_w$ がDoubletのz成分には依存せず、x成分とy成分の積に支配されることが分かる。したがって、 $m=1$ ,  $l=n=0$ のy軸向きDoubletの場合、(B-4)式から生成波は $S_2$ 波のみとなって流場は完全に左右反対称となるにも拘わらず、造波横力 $Y_w$ は作用しないことになり、

興味ある事実である。また、 $m=0$ であれば流場の対称性から当然のように横力は生じないから、結局Point Doubletが造波横力 $Y_w$ を受けるのは、x成分とy成分の合成として得られる斜軸Doubletの場合に限ることになる。

実際、このDoubletは $l=-1$ ,  $m=n=0$ の時、xの負軸を向き、水面の影響を無視する限り没水球を表すことになるから、その直径が $D$ となるように強さ $\mu$ を規定すれば、

$$\mu = \frac{1}{16} U_\infty D^3 \dots\dots(B-14)$$

となる。このとき、既に(B-12)及び(B-13)式で得られている造波抵抗 $X_w$ , 造波横力 $Y_w$ を、(A-24), (A-25)式の定義に倣って、 $\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D^2$ を規準に無次元化することにより係数の形に書き改めれば、 $C_{X_w}, C_{Y_w}$ の両係数は、

$$C_{X_w} = \frac{\pi}{32} r_0^4 e^{-r_0 f_1} \cdot [\dots] \dots\dots(B-15)$$

$$C_{Y_w} = \frac{\pi}{64} \cdot \frac{r_0^3}{f_1} e^{-r_0 f_1} \cdot lm \cdot \{\dots\} \dots\dots(B-16)$$

のように表記でき、大括弧および中括弧内は各々(B-12), (B-13)式に等しく、(C-6)式のように引数( $\alpha \equiv gf/U_\infty^2$ )を $\kappa_0 f$ から $r_0 f_1$ の無次元量の積に変更したものに他ならない。ここに、式中の $r_0$ と $f_1$ は、各々

$$\left. \begin{aligned} r_0 &\equiv \kappa_0 D \\ f_1 &\equiv \frac{f}{D} \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-17)$$

のように、波数 $\kappa_0$ と没水深度 $f$ を、(B-14)式に現れる直径 $D$ を規準に無次元化したものであり、 $f_1$ は本論で言う $f$ に相等する。

そこで、上記のように得られた $C_{X_w}, C_{Y_w}$ の低速( $r_0 \rightarrow \infty$ )及び高速( $r_0 \rightarrow 0$ )での漸近挙動を調査しておく。ここに(B-15), (B-16)両式中に現れる変形Bessel関数 $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ は、 $x \rightarrow 0$ 及び $x \rightarrow \infty$ での両極限において

$$\left. \begin{aligned} K_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\log_e x + (\log_e 2 - \gamma) \\ &\quad - \frac{x^2}{4} \log_e x + O(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} - \dots \right) \\ K_1(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \log_e x + O(x) \\ &\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left( 1 + \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \text{ただし, } \gamma = 0.57721 \dots \text{(Eulerの定数)} \dots\dots(B-18)$$

のような漸近挙動を示すことが知れているから便利である。この性質を利用すれば、 $C_{X_w}, C_{Y_w}$ の低速漸近解 ( $\gamma_0 \rightarrow \infty$ )は

$$\left. \begin{aligned} C_{X_w} &\sim \sqrt{\frac{\pi^3 \gamma_0^7}{512 f_1}} e^{-2\gamma_0 f_1} \cdot \\ &\times \left\{ l^2 + n^2 + \frac{1}{8\gamma_0 f_1} (3l^2 + 2m^2 + 5n^2) + \dots \right\} \\ C_{Y_w} &\sim \sqrt{\frac{\pi^3 \gamma_0^7}{2048 f_1^3}} e^{-2\gamma_0 f_1} \cdot l m \cdot \left( 1 + \frac{9}{8\gamma_0 f_1} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-19)$$

のように得られ、両者ともに  $\gamma_0 (=1/F_n^2)$  について指数関数的な強い減衰挙動を示すから、 $F_n \rightarrow 0$ なる低速極限では  $C_{X_w} \rightarrow 0, C_{Y_w} \rightarrow 0$ となり、両係数とも速やかにゼロに漸近することが分かる。

一方、 $C_{X_w}, C_{Y_w}$ 両係数の高速漸近解 ( $\gamma_0 \rightarrow 0$ )についても、 $K_0, K_1$ が(B-18)式のように振舞うことから、

$$\left. \begin{aligned} C_{X_w} &\sim \frac{\pi}{64} \cdot \frac{\gamma_0}{f_1^3} \cdot \\ &\times \left\{ m^2 + n^2 + \frac{\gamma_0 f_1}{2} (2l^2 - m^2 + n^2) + \dots \right\} \\ C_{Y_w} &\sim \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma_0}{f_1^3} \cdot l m \cdot \left( 1 - \frac{\gamma_0 f_1}{2} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-20)$$

のように求められ、両係数とも  $O(\gamma_0)$ として得られていることから、 $F_n \rightarrow \infty$ の高速極限では  $O(1/F_n^2)$ 程度の減衰でゼロとなる。そこで、参考のために(B-20)式を造波抵抗  $X_w$ 、造波横力  $Y_w$  に対する有次元量の表式に書き改めると、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} X_w &\sim \frac{\pi}{128} \rho g \frac{D^6}{f_1^3} \cdot \\ &\times \left\{ m^2 + n^2 + \frac{g f_1}{2 U_\infty^2} (2l^2 - m^2 + n^2) + \dots \right\} \\ Y_w &\sim \frac{\pi}{64} \rho g \frac{D^6}{f_1^3} \cdot l m \cdot \left( 1 - \frac{g f_1}{2 U_\infty^2} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(B-21)$$

となり、 $U_\infty \rightarrow \infty$ の高速域では  $X_w, Y_w$ ともに一定値を取ることが分かる。ただし、 $X_w$ については  $m=n=0$ の場合に限り、最低次の項が消滅し  $X_w = O(1/U_\infty^2)$ となることは、没水球 ( $l=-1$ )が高速域において造波抵抗自体を受けないことを教えている。

【附録C】単一の吹き出しに作用する造波抵抗

ここでは、附録Bで斜軸Doubletに対して行ったと同様な手法を用いて、没水した単一の吹き出しに働く造波抵抗を解析的に求めおく。

一様流  $U_\infty$ の中で原点直下、没水深度  $f$ の点  $(0, 0, -f)$ に配された強さ  $\sigma$ のPoint Sourceが生成する波は、(B-3)式に示す  $\zeta, \rho$ の符号を反転させ、 $\sigma$ を乗じたものに他ならないから、その振幅関数は直ちに

$$\left. \begin{aligned} C(\theta) &= \frac{4\sigma\kappa_0}{U_\infty} e^{-\kappa_0 f \sec^2 \theta} \sec^3 \theta \\ &\equiv C_1(\theta) \\ S(\theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(C-1)$$

と決定され、S波は生じず、C波の対称成分  $C_1$ のみで素成波は構成される。これを(A-23)第1式に代入することにより、この時の造波抵抗  $X_w$ は、

$$\begin{aligned} X_w &= 16\pi\rho\sigma^2\kappa_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\kappa_0 f \sec^2 \theta} \sec^3 \theta d\theta \\ &\equiv 16\pi\rho\sigma^2\kappa_0^2 \cdot \mathfrak{D}_0(\kappa_0 f) \end{aligned} \dots\dots(C-2)$$

を計算すれば求め得る。一方、(A-22)第1式からも明らかに  $Y_w=0$ となるから、造波横力は生じない。以下、積分値  $\mathfrak{D}_0$ を評価することを考えるが、附録Bで積分  $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ に対して行ったと全く同様な手順を踏襲することにより、 $\mathfrak{D}_0(\alpha)$ は、

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0(\alpha) &\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\alpha \sec^2 \theta} \sec^3 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} e^{-\alpha} \int_1^\infty e^{-\alpha\xi} \frac{\xi+1}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi \\ &= \frac{1}{4} e^{-\alpha} \cdot [K_0(\alpha) + K_1(\alpha)] \end{aligned} \dots\dots(C-3)$$

のように、容易に変形Bessel関数を用いて記述できる。従って、求めるべき造波抵抗  $X_w$ は、(C-2)式の  $\mathfrak{D}_0$ に(C-3)式を適用することにより、

$$X_w = 4\pi\rho\sigma^2\kappa_0^2 e^{-\kappa_0 f} \cdot [K_0(\kappa_0 f) + K_1(\kappa_0 f)] \dots\dots(C-4)$$

のような単純な形に定まる。そこで、吹き出し強さ  $\sigma$ を流速  $U_\infty$ に拘わらず無限後流での円盤径が  $D$ となるように

$$\sigma = \frac{1}{16} U_\infty D^2 \dots\dots(C-5)$$

と定め、(C-4)式を無次元係数の形に書き改めれば、

$$\begin{aligned} C_{X_w} &\equiv \frac{X_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D^2} \\ &= \frac{\pi}{32} \gamma_0^2 e^{-\gamma_0 f_1} \cdot [K_0(\gamma_0 f_1) + K_1(\gamma_0 f_1)] \end{aligned} \dots\dots(C-6)$$

となる。以下、附録Bと同様に変形Bessel関数についての(B-18)式の性質を利用して、得られた  $C_{X_w}$ の低速及び高速極限での挙動漸近を明確にしておく。

まず、低速 ( $\gamma_0 \rightarrow \infty$ )での造波抵抗係数の挙動は、

$$C_{xw} \underset{r_0 \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi^3 \gamma_0^3}{512 f_1}} e^{-2\gamma_0 f_1} \cdot \left(1 + \frac{1}{8\gamma_0 f_1} + \dots\right) \dots\dots\dots(C-7)$$

として得られ、Doubletに対する(B-19)式と同様、 $\gamma_0$ について指数関数的に減衰するから、 $F_n (=1/\sqrt{\gamma_0}) \rightarrow 0$ では速やかに $C_{xw} \rightarrow 0$ となる。

一方、高速( $\gamma_0 \rightarrow 0$ )での漸近挙動は、

$$C_{xw} \underset{r_0 \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{32} \cdot \frac{\gamma_0}{f_1} \cdot \{1 - \gamma_0 f_1 \cdot \log_e(\gamma_0 f_1) - \gamma_0 f_1 (1 + \gamma - \log_e 2) + \dots\} \dots\dots\dots(C-8)$$

となり、 $C_{xw}$ は $O(\gamma_0)$ 程度の大きさしか生じないから、 $F_n \rightarrow \infty$ では、(B-20)式と同様に $O(1/F_n^2)$ の意味でゼロとなる。また、(C-8)式を造波抵抗値 $X_w$ の形に戻すと、

$$X_w \underset{U \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi}{64} \rho g \frac{D^4}{f} \cdot \left\{1 + O\left(\frac{\log_e U_\infty}{U_\infty^2}\right)\right\} \dots(C-9)$$

となることから、Point Sourceが表す放物線状の半無限長物体が受ける造波抵抗は、(B-21)式の没水球に対する場合とは異なり、高速域では有限な一定値 $\frac{\pi}{64} \rho g \frac{D^4}{f}$ に近づくことが分かる。