

(昭和 61 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

斜航する船に働く造波横力について

正員 堀 勉* 正員 松 村 清 重**
正員 田 中 一 朗**

On the Lateral Force Caused by Wave Generation Acting
on the Ship Hull with Steady Drift Angle.

by Tsutomu Hori*, *Member* Kiyoshige Matsumura**, *Member*
Ichiro Tanaka**, *Member*

Summary

The lateral force and the resistance that are caused by wave generation acting on the body advancing with steady drift angle were discussed by the asymptotic expansion method under the assumptions, $F_n \ll 1$ and $\beta \ll 1$, where F_n is the Froude number and β the drift angle. The technique of the Low Speed Wave Making Theory was applied to represent the flow field around the body. Lateral force and resistance are obtained by using the amplitude functions of the free wave derived by the both of the Approximation in x-Integral Method and in y-Integral Method those were identified. The coefficients of the lateral force and the resistance were calculated for not so slender floating prolate spheroids and vertical elliptic cylinder. It was shown that the first approximation of the coefficient of the lateral force, which acts opposite to the lift caused by the separated vortices in the case of bluff bodies, are proportional to βF_n^6 and second one to $\beta F_n^7 \sin(1/F_n^2 + \pi/4)$.

1 緒 言

斜航する船に働く横力を推定する問題は、主に船の操縦性能を把握する上で重要な課題であることから、研究も活発に行われている。

最近では、不破¹⁾が細長体理論の立場から境界層の三次元剝離に基づく自由渦の流出を考慮した横力の推定法を示し、著者ら²⁾も細長回転楕円体について剝離線ならびに渦層の強さの決定法などについて論じてきたが、これらの研究では低速で航走するとの立場から造波影響は小さいものとして取り扱われてきた。

しかし、松本ら³⁾によって、水面上を航走する船においては船首部で造波影響が顕著に現われ、必ずしも波の影響が無視しえないことが報告され、斜航中の横力推定の問題も、何らかの意味で自由表面影響を配慮する必要があるように思われる。

自由表面影響を考慮した横力推定の問題は、古くは花岡⁴⁾によって、最近では野中⁵⁾によって、薄翼理論に波の影響を考慮した形で取り扱われた。しかし、船体を揚

力体として捉える場合、薄翼理論では船首端で横力分布に特異性を持つなど、問題点もあると考えられる。

一方、比較的低速で斜航角が小さい場合には、船体周りの横力分布などは三次元剝離の影響を無視し、二重模型周りの流れとして解析しても十分表現できることを考えると、横力推定に際しても二重模型周りの流場を基礎とし、その上で波流れを考えればよいものと思われる。造波抵抗の分野では、このような立場から導かれたOgilvie⁶⁾、馬場⁷⁾、丸尾⁸⁾の低速造波理論が造波抵抗の算定に際して十分な成果を収めており、斜航時の横力を推定する問題でも波の影響を考慮する場合には、低速造波理論を適用することにより、その成果が期待される。また、低速造波理論では後続自由波の振幅関数が比較的簡単に求められるため、造波に基づく横力を推定するに際しても振幅関数のレベルから論ずることができ、一方、波形解析を通じて、造波に基づく横力を三次元剝離に基づく横力から分離して計測することも可能になると考えられる。

本論は以上のような状況から、斜航する船体に働く横力の推定問題を、三次元剝離渦による横力は造波による横力と分離できるものとの立場から、造波に基づく横力(以下、造波横力と称す)に限定し、前進速度が小さい

* 大阪大学大学院工学研究科

** 大阪大学工学部

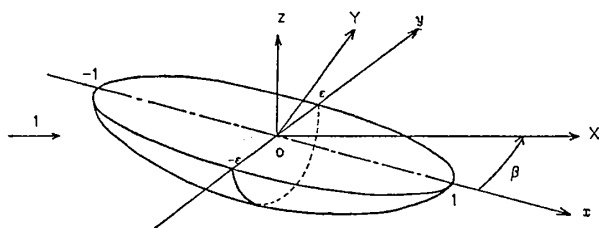


Fig.1 Coordinate systems and definitions of some basic quantity.

と仮定することによって低速造波理論を適用し、造波横力と造波抵抗を統一的に論じたものである。今回は造波横力を定性的に調べるために、船型として半没回転楕円体と無限喫水の直立楕円柱を例にとり、斜航角が小さいとして、馬場⁹⁾、丸尾⁹⁾によって示された漸近展開法を適用し解析を行ったところ、造波横力が三次元剥離に基づく横力（通常の揚力）とは逆向きに生ずる傾向があるなど興味深い結果も得られたので、不十分な部分もあるが、ここに御報告し御批判を仰ぐ次第である。

2 理 論

船舶が自由表面上を斜航角 β 、船速 U_∞ で定常航走する場合を考える。

座標系は、Fig.1 に示すように、鉛直上向きに z 軸を、船長方向に x 軸を、これらに直交するように y 軸をとった (x, y, z) 座標系と、解析の便利のため、 (x, y, z) 座標系を z 軸の回りに β だけ回転させ、一樣流方向に X 軸をとった (X, Y, Z) 座標系の2つのものを考え、ともに座標原点 O を静水面上船体中央とする。

本論で取り扱う物理量はすべて無次元量とし、無次元化は、長さは半船長 l 、速度は一樣流速 U_∞ を用いて行い、その他の諸量は特に断わらない限りこれらを余分な係数なしに組み合わせることによって行う。したがって、船首端の座標は $x = -1$ 、船尾端は $x = 1$ であり、一樣流速は1となる。

取り扱う船体の形状は、理論的にはそれほど大きな制限があるわけではなく、一般の船型について扱い得る。しかし、今回は造波に基づく横力を定性的に調べるために、具体例としてはタンカー船型のような鈍い物体の代表として、半没回転楕円体と、喫水の影響を見るために水面を垂直に貫通する無限喫水の楕円柱を取り上げることにし、最大無次元半幅を ε と定義する。ただし、 ε は $O(1)$ と仮定し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限はとらないものとする。

2.1 低速造波理論による定式化

低速造波理論は、船舶が直進する場合にのみ適用されるわけではなく、流場が非粘性かつ非回転である限り、船舶が斜航する場合をも取り扱い得る。

この場合、非粘性と仮定するとしても、三次元剥離渦

の影響を何らかの形で取り入れるべきであるが、三次元剥離渦による横力と、造波に基づく横力が単に重ね合わせによって求めることができると仮定し、造波横力を低速造波理論を適用して求めることにする。

フルード数 F_n が非常に小さいと仮定すれば、馬場⁷⁾が示したように速度ポテンシャル Φ は、二重模型周りの速度ポテンシャル ϕ_r と、造波に基づく速度ポテンシャル ϕ_w に分離し、

$$\Phi = \phi_r + \phi_w \quad (1)$$

と書ける。同様に速度ベクトル q 、波高 h も

$$q = \nabla \Phi = q_r + q_w \quad (2)$$

$$h = \zeta_r + \zeta_w \quad (3)$$

と分離して表示できる。

ϕ_r は三次元剥離を生じない限り、直進成分 $\phi_r^{(0)}$ と横流れ成分 $\phi_r^{(1)}$ を用いて、 x - y 座標で

$$\phi_r = \cos \beta \cdot \phi_r^{(0)}(x, y, z) + \sin \beta \cdot \phi_r^{(1)}(x, y, z) \quad (4)$$

と表示でき、揚力を発生しない流場である¹⁰⁾。 ϕ_w は斜航中の場合も、直進時と同様、船体表面条件を無視すれば、ラプラスの式 $[L]$ と自由表面条件 $[F]$ を用いて求められる。 ϕ_w の決定には X - Y 座標表示が便利であるので、 $[L]$ は

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial Z^2} = 0 \quad (Z \leq 0) \quad (5)$$

である。同様に $[F]$ は

$$[F] \quad 2F_n^2 \left(q_x^2 \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial X^2} + 2q_x q_y \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial X \partial Y} + q_y^2 \frac{\partial^2 \phi_w}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \phi_w}{\partial Z} = D(X, Y) \quad (Z=0) \quad (6)$$

となる。ただし、フルード数 F_n は慣例に従い、船長 $2l$ を基準にして

$$F_n = \frac{U_\infty}{\sqrt{2gl}} \ll 1 \quad (7)$$

と定義され、 q_x, q_y はそれぞれ二重模型流れの静水面上での X, Y 方向の流速である。 D 関数は、二重模型流れによる局所的な波高

$$\zeta_r = F_n^2 (1 - q_x^2 - q_y^2) \quad (8)$$

を用いて

$$D(X, Y) = \frac{\partial}{\partial X} (\zeta_r q_x) + \frac{\partial}{\partial Y} (\zeta_r q_y) \quad (9)$$

と表わされる。 D 関数は二重模型流れによる基礎流場特性を表わす関数といえる。

ϕ_w は馬場⁷⁾によって、局所流による波長の変化を無視して近似的に解かれ、無限後流での漸近解が

$$\phi_w(X, Y, Z) \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} \text{Imag} \left[-\frac{2}{F_n^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{H(\Theta)} e^{(z+i\omega)\sec^2\Theta/(2F_n^2)\sec^2\Theta} d\Theta \right] \quad (10)$$

$$\zeta_w(X, Y) \underset{X \rightarrow \infty}{\sim} \text{Real} \left[\frac{2}{F_n^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{H(\Theta)} e^{i\varpi \sec^2 \Theta / (2F_n^2)} \sec^3 \Theta d\Theta \right] \quad (11)$$

であり、振幅関数は

$$H(\Theta) = P(\Theta) + iQ(\Theta) \\ = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_0} D(X, Y) e^{i\varpi \sec^2 \Theta / (2F_n^2)} dX dY \quad (12)$$

であることが示された。ここに、 Σ_0 は船の水線面を除いた静水面の全領域で積分することを意味し、“—”, Imag, Real は、それぞれの複素共役、虚部、実部をとるものとする。 Θ は一様流方向 X から測った素成波の伝播方向を表わし、 ϖ は原点から点 (X, Y) までの素成波の伝播距離であるから、 X - Y 座標表示で

$$\varpi = X \cos \Theta + Y \sin \Theta \quad (13)$$

である。

2.2 二重模型周りの流場

前節 (12) 式で示したように、振幅関数 $H(\Theta)$ を求めるためには、(9) 式で与えられる D 関数を求めておく必要がある。解析の便利のため、 D を改めて

$$D(X, Y) \equiv F_n^2 \tilde{D}(X, Y) \quad (14)$$

と定義すると、 $\tilde{D}$ はフルード数に依存しない D 関数といえる。局所流速を q_r 、局所流速ベクトルを $\mathbf{q}_r$ 、静水面内での 2 次元のなハミルトンの演算子を ∇_2 と書けば、 $\tilde{D}$ は座標系によらず

$$\tilde{D} = \nabla_2 \circ \{(1 - q_r^2) \mathbf{q}_r\} \quad (15)$$

とベクトル表示できる。

したがって、静水面が $\zeta=0$ となるようにとった直交曲線座標系 (ξ, η, ζ) では、 $\tilde{D}$ は連続の式を考慮し、 ξ, η 方向の微分を ζ 方向の微分に書き改めると

$$\tilde{D}(\xi, \eta) = (q_r^2 - 1) \left(\frac{\partial q_\zeta}{h_\zeta \partial \zeta} + K_{\zeta\xi} q_\xi + K_{\zeta\eta} q_\eta \right) \\ - q_\xi \frac{\partial}{h_\xi \partial \xi} q_r^2 - q_\eta \frac{\partial}{h_\eta \partial \eta} q_r^2 \quad (\zeta=0) \quad (16)$$

と表わされる。ここに、 q_ξ, q_η, q_ζ はそれぞれ ξ, η, ζ 方向の二重模型流れの静水面上での流速であり、 h_ξ, h_η, h_ζ はそれぞれの方向の測定係数である。 $K_{\zeta\xi}, K_{\zeta\eta}$ は ζ 軸の ζ - ξ 面内、 ζ - η 面内の曲率であり、

$$\left. \begin{aligned} K_{\zeta\xi} &= \frac{1}{h_\zeta h_\xi} \cdot \frac{\partial h_\zeta}{\partial \xi} \\ K_{\zeta\eta} &= \frac{1}{h_\zeta h_\eta} \cdot \frac{\partial h_\zeta}{\partial \eta} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

と定義したものである。

$\xi=\xi_0$ が船体表面を表わすものとする、水線での $\tilde{D}$ の値は、 $q_\xi|_{\xi=\xi_0}=0, q_\zeta|_{\zeta=0}=0$ であるから、

$$\tilde{D}|_{\xi=\xi_0} = \left[-2q_\eta^2 \frac{\partial q_\eta}{h_\eta \partial \eta} \right.$$

$$\left. + (q_\eta^2 - 1) \left(\frac{\partial q_\zeta}{h_\zeta \partial \zeta} + K_{\zeta\eta} q_\eta \right) \right]_{\xi=\xi_0} \quad (18)$$

となる。第 1 項はどのような場合にも生ずるが、第 2 項は二重模型周りの流場が楕円柱周りのような二次元流れのときには消失するから、この項は二重模型流場の三次元性を表わす項といえる。

$\tilde{D}$ 関数は斜航角 β に非線型的に依存するが、 β が比較的小さいときには、非線型性はそれほど強くないと考えられる。また、定性的な造波横力の特性を簡単に把握するため、ここでは

$$\beta \ll 1 \quad (19)$$

と仮定し、 β の 1 次の項まで展開することにする。すなわち、(4) 式の ϕ_r および (14) 式の $\tilde{D}$ を、便利のため X - Y 座標ではなく x - y 座標で記述し、

$$\phi_r = \phi_r^{(0)}(x, y, z) + \beta \phi_r^{(1)}(x, y, z) + \dots \quad (20)$$

$$\tilde{D} = \tilde{D}^{(0)}(x, y) + \beta \tilde{D}^{(1)}(x, y) + \dots \quad (21)$$

と展開する。

以下、半没回転楕円体と直立楕円柱について、二重模型流れの速度ポテンシャルから、 $\tilde{D}$ 関数を導く。

直角座標 (x, y, z) から楕円座標 (ξ, η, ζ) への座標変換は、極座標との対応を考えて、回転楕円体の場合は

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta \\ y &= c \sinh \xi \sin \eta \cos \zeta \\ z &= c \sinh \xi \sin \eta \sin \zeta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

によって、楕円柱の場合は

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \xi \cos \eta \\ y &= c \sinh \xi \sin \eta \\ z &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

によって行う。ここで、 c は楕円の共焦点間距離の半分であり、 $\xi=\xi_0$ が長軸 1、短軸 ε の楕円表面を表わすすると、

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ \xi_0 &= \tanh^{-1} \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

なる関係がある。 $\zeta=0$ なる静水面と $\xi=\xi_0$ なる楕円表面との交線、すなわち、水線面形状は両者ともに

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \eta \\ y &= \varepsilon \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と η で媒介変数表示される。

二重模型流れの速度ポテンシャルを、(20) 式に従い、直進成分 $\phi_r^{(0)}$ と横流れ成分 $\phi_r^{(1)}$ に分けて記すと、回転楕円体の場合は

$$\left. \begin{aligned} \phi_r^{(0)} &= \left\{ c \cosh \xi - \frac{\varepsilon}{Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right)} Q_1^1(\cosh \xi) \right\} \cos \eta \\ \phi_r^{(1)} &= \left\{ c \sinh \xi - \frac{\varepsilon}{Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right) + \varepsilon Q_1^2 \left(\frac{1}{c} \right)} \right. \\ &\quad \left. \times Q_1^1(\cosh \xi) \right\} \sin \eta \cos \zeta \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

であるから、楕円体表面上での速度ポテンシャルは、
(26) 式において $\xi = \xi_0$ とすればよく、

$$\phi_r|_{\xi=\xi_0} = A_0 \cos \eta + \beta A_1 \sin \eta \cos \zeta \quad (27)$$

と書ける。ただし、 A_0, A_1 は

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\equiv 1 - \frac{\varepsilon Q_1 \left(\frac{1}{c} \right)}{Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right)} \\ A_1 &\equiv \varepsilon \left\{ 1 - \frac{Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right)}{Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right) + \varepsilon Q_1^2 \left(\frac{1}{c} \right)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

である。 Q_1 は第2種ルジャンドル関数、 Q_1^1, Q_1^2 は第2種ルジャンドル陪関数であり、次のように定義されている。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \left(\frac{1}{c} \right) &= \frac{1}{2c} \log \left(\frac{1+c}{1-c} \right) - 1 \\ Q_1^1 \left(\frac{1}{c} \right) &= \frac{\varepsilon}{2c} \log \left(\frac{1+c}{1-c} \right) - \frac{1}{\varepsilon} \\ Q_1^2 \left(\frac{1}{c} \right) &= \frac{2c^2}{\varepsilon^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

A_0, A_1 の $\varepsilon \rightarrow 1$ (球) と $\varepsilon \rightarrow 0$ (平板) での漸近挙動は

$$\left. \begin{aligned} A_0 \\ A_1 \end{aligned} \right\} \sim \frac{3}{2} \quad (\varepsilon \rightarrow 1) \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &\sim 1 - \varepsilon^2 \log \varepsilon \\ A_1 &\sim 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (31)$$

である。

楕円柱の場合の二重模型流れの速度ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} \phi_r^{(0)} &= (1+\varepsilon) \cosh(\xi - \xi_0) \cos \eta \\ \phi_r^{(1)} &= (1+\varepsilon) \cosh(\xi - \xi_0) \sin \eta \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

であり、柱面上でのポテンシャルは

$$\phi_r|_{\xi=\xi_0} = (1+\varepsilon)(\cos \eta + \beta \sin \eta) \quad (33)$$

となる。これは回転楕円体の (27) 式において、 $A_0 = A_1 = (1+\varepsilon)$ と置いたことに相等する。

基礎流場の速度ポテンシャル $\phi_r|_{\xi=\xi_0}$ がそれぞれ (27) 式、(33) 式のように得られたから、これらを (18) 式に代入して水線上での $\tilde{D}$ 関数を求め、直進成分 $\tilde{D}^{(0)}$ と横流れ成分 $\tilde{D}^{(1)}$ に分けて整理すれば、回転楕円体の場合は

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(0)}(\xi_0, \eta) &= \left(\frac{2\varepsilon^2}{\tau^6} - \frac{1}{\tau^4} \right) A_0^3 \sin^2 \eta \cos \eta \\ &\quad + \frac{1}{\tau^2} A_0 \cos \eta \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(1)}(\xi_0, \eta) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{2\varepsilon^2}{\tau^6} - \frac{1}{\tau^4} \right) \\ &\quad \times A_0^2 A_1 \sin \eta (\sin^2 \eta - 2\varepsilon^2 \cos^2 \eta) \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon^2 \tau^2} A_1 \sin \eta \end{aligned} \quad (35)$$

と記述される。ここに、 τ は

$$\tau \equiv \sqrt{\sin^2 \eta + \varepsilon^2 \cos^2 \eta} \quad (36)$$

で定義される η の関数である。

また、楕円柱の場合の $\tilde{D}$ 関数は

$$\tilde{D}^{(0)}(\xi_0, \eta) = -\frac{2\varepsilon^2}{\tau^6} (1+\varepsilon)^3 \sin^2 \eta \cos \eta \quad (37)$$

$$\tilde{D}^{(1)}(\xi_0, \eta) = -\frac{2}{\tau^6} (1+\varepsilon)^3 \sin \eta (\sin^2 \eta - 2\varepsilon^2 \cos^2 \eta) \quad (38)$$

と求まる。

しかし、このような $\tilde{D}$ の展開は $\varepsilon = O(1)$ のときには β, η に関して一様に展開でき、 $\tilde{D}^{(0)}, \tilde{D}^{(1)}$ はそれぞれ $O(1)$ と考えてよいが、 $\varepsilon \ll 1$ のときには必ずしも一様な展開ができない。実際 $\eta = O(\varepsilon)$ の場所で $\tilde{D}^{(0)}, \tilde{D}^{(1)}$ 自身は回転楕円体の場合とともに $1/\varepsilon^2$ で等しくなり、 $\tilde{D}$ の展開は η に関して非一様となる。しかし、 β に関しては $\beta \ll 1$ である限り非一様性はない。

一方、楕円柱の場合、回転楕円体の場合とは異なり、細長比 ε に関するオーダーは $\tilde{D}^{(0)}$ が $1/\varepsilon^2$ であるのに対し、 $\tilde{D}^{(1)}$ は $1/\varepsilon^3$ と大きいから、 $\tilde{D}$ 関数の β に関する漸近展開が成立するためには、細長比 ε と斜航角 β との間に

$$\varepsilon \gg \beta \quad (39)$$

のような関係が成立している必要があり、その意味で ε には β に依存する適用限界がある。

2.3 振幅関数

本節では、振幅関数 $H(\theta)$ の斜航中での低速漸近解を求める。

ここでは解析の便利のため、(12) 式で与えられる H を

$$H(\theta) \equiv F_n^5 \tilde{H}(\theta) \quad (40)$$

と書いて $\tilde{H}$ を定義すると、 $\tilde{H}$ は (14) 式で定義された $\tilde{D}$ を用いて次のように表わされる。

$$\tilde{H}(\theta) = -\frac{1}{4\pi F_n^3} \iint_{\Sigma_0} \tilde{D} e^{i\varpi \sec^2 \theta / (2F_n^2)} dX dY \quad (41)$$

素成波の伝播方向 θ は一様流の方向 X を基準に測られており、一方、 $\tilde{D}$ 関数は前節で示したように $x-y$ 座標系で記述したから、(41) 式においても X, Y をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \beta + y \sin \beta \\ Y &= y \cos \beta - x \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

によって、 x, y に座標変換すればよい。この変換則を (13) 式に代入し、素成波の伝播方向を新たに船長方向 x から測り、これを θ とすると、 ϖ は $x-y$ 座標で

$$\varpi = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (43)$$

と書け、 θ は

$$\theta \equiv \Theta + \beta \quad (44)$$

で定義される。このとき、 θ を用いて表示した $\tilde{H}(\theta)$ を改めて $\tilde{H}(\theta)$ と書くことにすると

$$\tilde{H}(\theta) = -\frac{1}{4\pi F_n^3} \iint_{\Sigma_0} \tilde{D}(x, y)$$

$$\times e^{i(x\cos\theta+y\sin\theta)\sec^2(\theta-\beta)/(2F_n^2)} dx dy \quad (45)$$

と表わすことができる。

以下、水線面が (25) 式で表わされるような長軸 1、短軸 ε の楕円形状を有する前後左右対称船について、 $\tilde{H}(\theta)$ を近似的に求めることにする。

フルード数 F_n に関する振幅関数の最低次の項 $\tilde{H}_x(\theta)$ は、馬場⁹⁾によって示されたように、 x に関して部分積分し、 $\tilde{D}$ 関数が無限遠で消失することを用い、水線に沿った y に関する積分を、 η に関する積分に変換して記述すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x(\theta) = & -\frac{i\varepsilon \cos^2(\theta-\beta)}{\pi F_n^2 \cos\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{\varepsilon}} \tilde{D}(\xi_0, \eta) \\ & \times \cos\left\{\frac{1}{2F_n^2}(\cos\eta \cos\theta + \varepsilon \sin\eta \sin\theta)\sec^2(\theta-\beta)\right\} \\ & \times \cos\eta d\eta \end{aligned} \quad (46)$$

となる (Approximation in x -Integral)。ここに (46) 式の $\tilde{D}$ の表示は (18) 式で得られた (ξ, η, ζ) 座標表示のものである。また、 $\tilde{D}$ 関数には、媒介変数 η に対して

$$\tilde{D}(\xi_0, \eta) = -\tilde{D}(\xi_0, \eta + \pi) \quad (47)$$

のような対称性があることを考慮して、 $-\pi \leq \eta \leq \pi$ 間の積分を後の便利のために、その半分の $-\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{\varepsilon} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{\varepsilon}$ 間の積分に変換してある。

(46) 式の振幅関数の表示は、(45) 式では水面全域に分布していた波源が x で部分積分することによって水線上に凝集された形となって、薄い船の理論の吹き出し分布に対応している。しかし、波源すなわち素成波の発生位置が薄い船の理論では縦中心面上に置かれるのに対し、低速造波理論では実際の水線上にあるから、振幅関数には Guillon 法的な修正が加えられていると考えることができ、良好な結果が期待できる。

(46) 式の η に関する積分は、 $F_n \ll 1$ と仮定しているので、 $\cos$ の項が激しく振動するため、停留位相法を用いて実行できる。停留点の座標を η_1 と書くと、 η_1 が θ との間に満たすべき関係式は

$$\tan \eta_1 = \varepsilon \tan \theta \quad (48)$$

となり、 $\theta = \pm \frac{\pi}{2} + \beta$ は $\eta_1 = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{\varepsilon}$ に対応する (ただし、 $\beta/\varepsilon \ll 1$) から、 η の積分区間を (46) 式のように選んでおけば、素成波の伝播方向 θ が決まれば停留点の η_1 は一意に決定されることになる。停留点は、物理的には水線上の至る所から発生している θ の方向へ伝播する素成波のうち、最も卓越した素成波が発生する位置を表わす。 η_1 での水線面の勾配を dy_1/dx と書くとき、(48) 式は $(dy_1/dx)\tan\theta = -1$ と書き換えられることから、素成波の伝播方向 θ とその法線方向が一致する水線上の点 $(\cos\eta_1, \varepsilon \sin\eta_1)$ が停留点となり、船体によって押し

出されるように素成波が発生することが分かる。

$\varepsilon \ll 1$ のときには、 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ の近傍を除いた $\theta = O(1)$ の造波に寄与するほとんどの領域で、停留点は $\eta_1 = O(\varepsilon)$ の船尾部に来ることがわかる。しかし、2.2 節で示したように $\tilde{D}$ 関数自身には $\varepsilon \ll 1$ のとき、 $\eta = O(\varepsilon)$ の領域で漸近展開に非一様性が生ずるから、部分積分によって F_n に関する高次の項を落としたことが、振幅関数 $\tilde{H}$ に対して ε と F_n に関する漸近展開の新たな非一様性を生じさせた原因となっている。

一方、丸尾⁹⁾によって行われたように、逆に y に関して部分積分し、最低次の項をとった $\tilde{H}_y(\theta)$ は、水線に沿った x に関する積分を、やはり η に関する積分に変換して記述すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y(\theta) = & -\frac{i \cos^2(\theta-\beta)}{\pi F_n^2 \sin\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{\varepsilon}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{\varepsilon}} \tilde{D}(\xi_0, \eta) \\ & \times \cos\left\{\frac{1}{2F_n^2}(\cos\eta \cos\theta + \varepsilon \sin\eta \sin\theta)\sec^2(\theta-\beta)\right\} \\ & \times \sin\eta d\eta \end{aligned} \quad (49)$$

となる (Approximation in y -Integral)。ところが、この積分も停留位相法を用いて積分すると、停留点は (48) 式と同一になるから、

$$\tilde{H}_x = \tilde{H}_y \quad (50)$$

と結論され、これを改めて $\tilde{H}$ と書くことにする。このように F_n に関する最低次の振幅関数を求める手法として、 x で部分積分しても y で部分積分しても、その後の積分を停留位相法で求める限り同一の結果を与え、 $\beta = 0$ の直進時に対して丸尾¹¹⁾が示したものと全く同じ事情である。

(46) 式ならびに (49) 式の位相関数を Ω と書き、これを停留点 η_1 まわりに展開し、(48) 式を用いて η_1 を θ に書き換えて記せば、

$$\begin{aligned} \Omega(\eta) = & \frac{1}{2F_n^2} \sigma \sec^2(\theta-\beta) \\ & - \frac{1}{4F_n^2} \sigma \sec^2(\theta-\beta) \{\eta - \eta_1(\theta)\}^2 + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

となる。ここに、

$$\sigma \equiv \sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2 \sin^2\theta} \quad (52)$$

である。部分積分した後でも停留位相法を適用し得るためには、停留点が $\eta_1 = O(\varepsilon)$ となり、そのとき σ は $O(1)$ であるから $(\varepsilon/F_n)^2 \gg 1$ でなければならず、細長比 ε とフルード数 F_n との間に

$$\varepsilon \gg F_n \quad (53)$$

の関係が成立している必要がある。

(53) 式のように仮定すると、振幅関数に対する低速漸近解は

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\theta) \underset{F_n \rightarrow 0}{\sim} & -2i\varepsilon \frac{\cos^3(\theta-\beta)}{\sqrt{\pi\sigma^3}} \tilde{D}\{\xi_0, \eta_1(\theta)\} \\ & \times \cos\left\{\frac{1}{2F_n^2}\sigma \sec^2(\theta-\beta) - \frac{\pi}{4}\right\} \quad (54) \end{aligned}$$

と求まる。(54)式で得られた振幅関数は(53)式の仮定のもとに求まったものであるから、単一パラメータ F_n に関する最低次の項ではなく、 F_n/ε を1つの微小パラメータにとった展開の最低次の項とみるべきである。

振幅関数を、前節で $\tilde{D}$ 関数に対して行ったと同じように、 β の1次の項まで展開することにし、 $\tilde{D}\{\xi_0, \eta_1(\theta)\}$ は θ の関数であるから、 $\tilde{D}$ を改めて

$$\tilde{D}\{\xi_0, \eta_1(\theta)\} \equiv \tilde{D}^{(0)}(\theta) + \beta \tilde{D}^{(1)}(\theta) \quad (55)$$

と定義する。このように θ 表示した $\tilde{D}$ 関数は、回転楕円体に対しては

$$\tilde{D}^{(0)}(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^2} [A_0^3(2\sigma^3 - \sigma) \sin^2\theta \cos\theta + A_0\sigma \cos\theta] \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}^{(1)}(\theta) = & \frac{A_1}{\varepsilon^3} [A_0^2(2\sigma^3 - \sigma) \sin\theta(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta) \\ & + \sigma \sin\theta] \quad (57) \end{aligned}$$

となり、楕円柱に対しては

$$\tilde{D}^{(0)}(\theta) = \frac{2(1+\varepsilon)^3}{\varepsilon^2} \sigma^3 \sin^2\theta \cos\theta \quad (58)$$

$$\tilde{D}^{(1)}(\theta) = \frac{2(1+\varepsilon)^3}{\varepsilon^3} \sigma^3 \sin\theta(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta) \quad (59)$$

となる。

$\tilde{H}$ の F_n, β に関する漸近解は $\tilde{D}^{(0)}, \tilde{D}^{(1)}$ を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\theta) \underset{\substack{F_n \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}}{\sim} & -2i\varepsilon \frac{\cos^3\theta}{\sqrt{\pi\sigma^3}} [\tilde{D}^{(0)}(\theta) + \beta \{\tilde{D}^{(1)}(\theta) \\ & + 3 \tan\theta \tilde{D}^{(0)}(\theta)\}] \cos\left\{\frac{1}{2F_n^2}\sigma \sec^2\theta(1-2\beta \tan\theta) \right. \\ & \left. - \frac{\pi}{4}\right\} \quad (60) \end{aligned}$$

と表わされる。ただし、上式の余弦関数を β で展開する

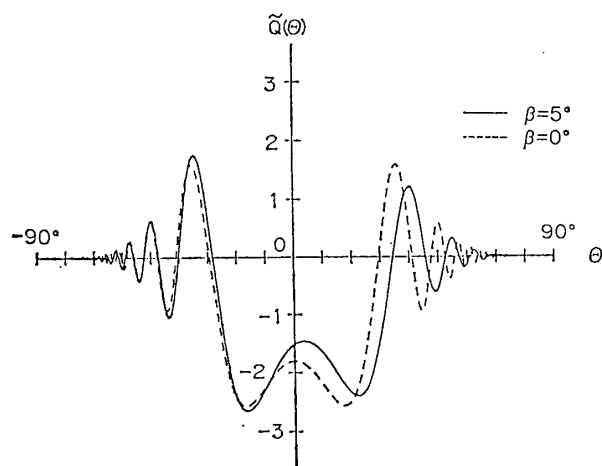


Fig. 2 Amplitude function for the prolate spheroid in the case of $\varepsilon=0.5$, $F_n=0.2$.

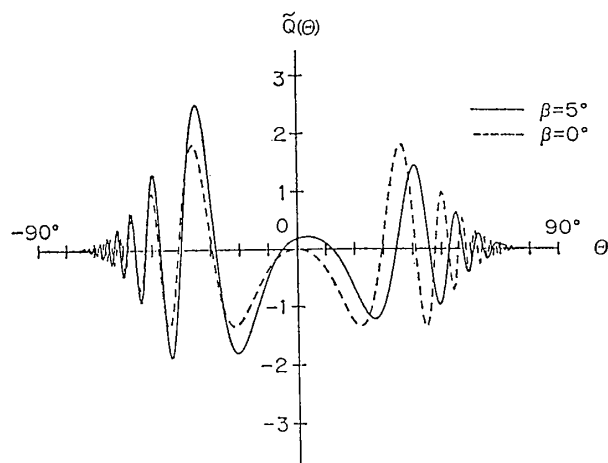


Fig. 3 Amplitude function for the elliptic cylinder in the case of $\varepsilon=0.5$, $F_n=0.2$.

ことは、漸近展開の新たな非一様性を生じさせる原因となるから、位相関数を β の1次の項まで展開するとどめた。 $\tilde{D}$ 関数を含む中括弧でくくられた β の項は第1項が基礎流場の斜航影響を、第2項が波の伝播方向の斜航影響を表わしている。

次に、振幅関数を実際に描いてみる。 $\tilde{H}$ は前後左右対称船のため純虚数だから、これを

$$\tilde{H} \equiv i\tilde{Q} \quad (61)$$

と書いて、 $\tilde{Q}$ を定義しておく。

Fig. 2 は、回転楕円体の $\varepsilon=0.5$, $F_n=0.2$, $\beta=5^\circ$ の場合の $\tilde{Q}(\theta)$ を示す。また、Fig. 3 は同一のパラメータで楕円柱の場合を示す。

$\tilde{Q}(\theta)$ は、斜航中の非対称な流場を扱っているため、点線で示した $\beta=0^\circ$ の直進中のように偶関数とならないので、 θ が $-\pi/2$ から $\pi/2$ まで示した。

Fig. 2, Fig. 3 ともに実線で示す斜航時の $\tilde{Q}(\theta)$ は、 θ の正負で概ねその様子が異なり、その振れ幅は θ が正の側で小さく、負の側で大きくなっており、またその振動は θ が正の側で緩やかで、負の側で激しくなっていることが分かる。これは振動の周期が(60)式の位相関数に支配され、 β が正であるから θ が正のとき位相関数の値が小となり、 θ が負のときは大となるためである。また、位相関数は $\tilde{D}$ には依存せず水線面形状のみに依存し、 F_n が小さいほど激しく振動する。しかし、(60)式の位相関数から分かるように、振動は F_n とは無関係に $\theta = \beta(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon^2)$ で停留する((75)式)。Fig. 2, Fig. 3 では、 $\theta=3^\circ$ がこの点に相等し、この辺りでその振動が最も緩やかで、その点を境にして振動の様子を変えていることが分かる。

一方、 $\tilde{Q}$ の振れ幅は、(60)式より大略 $\tilde{D}$ の値自身に支配されるとはいえ、位相関数にも依存するから一概

にはいえないが、楕円柱の場合はどんな ε に対しても θ が負の側で大きく、回転楕円体の場合も ε がある程度大きく（実際には $\varepsilon > 0.22$ ）なれば、 θ が負の側で大きくなるようである。

2.4 造波横力と造波抵抗

定常斜航する船体に働く造波に基づく流体力のうち、 Y 方向に働く造波横力（通常定義から言えば造波揚力）を Y_w 、 X 方向に働く造波抵抗を X_w とすると、それぞれの無次元係数 C_{Y_w} 、 C_{X_w} は、振幅関数 $\tilde{H}(\theta)$ を求めることができれば、

$$C_{Y_w} = \frac{Y_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (2l)^2} = \pi F_n^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tilde{H}(\theta)|^2 \tan \theta \sec^3 \theta d\theta \quad (62)$$

$$C_{X_w} = \frac{X_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (2l)^2} = \pi F_n^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tilde{H}(\theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta \quad (63)$$

のように表わすことができる¹²⁾。ただし、 ρ は流体密度である。 C_{Y_w} の被積分関数は C_{X_w} の被積分関数すなわち重率振幅関数の 2 乗と $\tan \theta$ の積になっているから、 C_{X_w} が決して負にならないのに比べ、 C_{Y_w} は振幅関数の非対称性の具合により正負の値を取り得る。斜航する回転楕円体や楕円柱の場合、Fig. 2, Fig. 3 に示した例の場合、 θ が負の側で $|\tilde{H}(\theta)|$ が大きいため、 C_{Y_w} は負の値をとるようであり、造波横力が通常の揚力とは逆向きに生ずることが予想される。

本節では、前節と同様、水線面が楕円形状の場合について造波横力係数ならびに造波抵抗係数に対する漸近的な表示式を求める。

(62) 式ならびに (63) 式の積分は、素成波の伝播方向を X 軸から測った θ で表示していたが、これを x 軸から測った θ 表示に書き改め、 β に関して 1 次の項まで展開することにすれば、 C_{Y_w} 、 C_{X_w} はそれぞれ

$$C_{Y_w} = \pi F_n^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tilde{H}(\theta)|^2 \tan \theta \sec^3 \theta \times \{1 - \beta \tan \theta (3 + \operatorname{cosec}^2 \theta)\} d\theta \quad (64)$$

$$C_{X_w} = \pi F_n^6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\tilde{H}(\theta)|^2 \sec^3 \theta (1 - 3\beta \tan \theta) d\theta \quad (65)$$

と近似される。 θ に関する積分区間が $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ となっているのは、本来の積分区間 $-\frac{\pi}{2} + \beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \beta$ から変換した際に生ずる誤差が、 β に関する 1 次の項までには現われないからである。

前節で既に、楕円水線面形状に対する振幅関数の漸近解が求まっているから $|\tilde{H}(\theta)|^2$ も β の 1 次の項まで展

開すれば

$$|\tilde{H}(\theta)|^2 \underset{\substack{F_n \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}}{\sim} \frac{2\varepsilon^2 \cos^6 \theta}{\pi \sigma^3} \left[(\tilde{D}^{(0)})^2 + 2\beta \{ \tilde{D}^{(0)} \tilde{D}^{(1)} + 3 \tan \theta (\tilde{D}^{(0)})^2 \} \right] \times \left[1 + \sin \left\{ \frac{1}{F_n^2} \sigma \sec^2 \theta (1 - 2\beta \tan \theta) \right\} \right] \quad (66)$$

と書ける。(66) 式は $|\tilde{H}(\theta)|^2$ が θ に関して緩やかに変動する平均的な項と、 F_n が小さいため $\sin \{ \dots \}$ による急激に変動する項に分けて表示したものである。 C_{Y_w} 、 C_{X_w} もこれにならひ、それぞれ

$$C_{Y_w} = C_{Y_w}^{(1)} + C_{Y_w}^{(2)} \quad (67)$$

$$C_{X_w} = C_{X_w}^{(1)} + C_{X_w}^{(2)} \quad (68)$$

のように、2つの成分に分けて表示することにする。このような成分表示は丸尾⁸⁾ にならったものであり、 $C_{Y_w}^{(1)}$ 、 $C_{X_w}^{(1)}$ は (66) 式の平均項からの寄与によって生ずる成分であり、 $C_{Y_w}^{(2)}$ 、 $C_{X_w}^{(2)}$ はその変動項からの寄与によって生ずる成分である。各項はそれぞれ、(66) 式を(64)、(65)式に代入し、 β に関する 1 次の項まで拾い出すと、

$$C_{Y_w}^{(1)} = 4\beta F_n^6 \varepsilon^2 \left[2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\sigma^3} \tilde{D}^{(0)} \tilde{D}^{(1)} d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \cos \theta}{\sigma^3} (\tilde{D}^{(0)})^2 d\theta \right] \quad (69)$$

$$C_{Y_w}^{(2)} = 2F_n^6 \varepsilon^2 \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\sigma^3} (\tilde{D}^{(0)})^2 \sin 2\Omega d\theta + \beta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sigma^3} \{ 2 \sin \theta \cos \theta \tilde{D}^{(0)} \tilde{D}^{(1)} + (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) (\tilde{D}^{(0)})^2 \} \sin 2\Omega d\theta \right] \quad (70)$$

$$C_{X_w}^{(1)} = 4F_n^6 \varepsilon^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{\sigma^3} (\tilde{D}^{(0)})^2 d\theta \quad (71)$$

$$C_{X_w}^{(2)} = 2F_n^6 \varepsilon^2 \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta}{\sigma^3} (\tilde{D}^{(0)})^2 \sin 2\Omega d\theta + \beta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta}{\sigma^3} \{ 2 \cos \theta \tilde{D}^{(0)} \tilde{D}^{(1)} + 3 \sin \theta (\tilde{D}^{(0)})^2 \} \sin 2\Omega d\theta \right] \quad (72)$$

と表示される。ただし、 $C_{Y_w}^{(1)}$ 、 $C_{X_w}^{(1)}$ については被積分関数の θ に関する対称性あるいは反対称性を考慮して $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間の積分に変換してある。また、 $C_{Y_w}^{(2)}$ 、 $C_{X_w}^{(2)}$ 中の Ω は

$$\Omega = \frac{1}{2F_n^2} \sigma \sec^2 \theta (1 - 2\beta \tan \theta) \quad (73)$$

で表わされる θ の関数であり、(51) 式に $\eta = \eta_1$ を代入した $\Omega\{\eta_1(\theta)\}$ を β の 1 次の項まで展開したものであ

る。

まず、(71) 式および (69) 式の平均的成分について述べる。 $C_{X_w}^{(1)}$ は、直進中の造波抵抗の平均的成分そのものであり、斜航角 β の影響は高々 β^2 に過ぎず、当然の結果である。

一方、 $C_{Y_w}^{(1)}$ は積分項が消失しない限り、 βF_n^6 に比例する造波横力を生ずることになる。 $C_{Y_w}^{(1)}$ の第1項は二重模型周りの流れが直進中の場合と異なることによって生ずる項であり、基礎流場の斜航影響を表わしている。比較的考えやすいが、第2項は直進中の基礎流場を用い、 x - y 座標系を単に β だけ回転させ、 X - Y 座標系で振幅関数を求めた場合に生ずる項であり、波の伝播方向 θ が斜航することによって β だけずれる効果を表わしている。 $\varepsilon=O(1)$ の肥大船の場合には、第1項と第2項のオーダーは明らかに釣り合っており、上記2つの斜航影響によって造波横力の平均成分が決定される。

以上述べてきた平均成分 $C_{Y_w}^{(1)}$, $C_{X_w}^{(1)}$ については、これ以上の簡単化は行えず、実際に2.2節で求めた $\tilde{D}^{(0)}$, $\tilde{D}^{(1)}$ を与えて $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 間の積分を行う必要がある。これに対し変動成分 $C_{Y_w}^{(2)}$, $C_{X_w}^{(2)}$ については、 $F_n \ll 1$ の仮定によって振幅関数が θ に関して激しく変動することになるため、さらに停留位相法を用いて積分を評価することができる。

(70) 式ならびに (72) 式の位相関数が等しいことから、停留点も等しく、それを θ_1 と書くと、

$$\theta_1 = \frac{2}{1+\varepsilon^2} \beta + \dots \quad (74)$$

と求まる。これは、 X 軸から測った通常の意味での素成波の伝播方向 θ で書き換えると、

$$\Theta_1 = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \beta + \dots \quad (75)$$

に相等する。Fig. 2, Fig. 3 に例を挙げた $\varepsilon=0.5$, $\beta=5^\circ$ の振幅関数では、この停留点は $\Theta_1 = \frac{3}{5} \beta$ すなわち $\Theta_1 = 3^\circ$ の点に当り、確かに振幅関数が緩やかに変動している。

(73) 式の Ω は、停留点 θ_1 周りに、

$$\Omega(\theta) = \frac{1}{2F_n^2} + \frac{1+\varepsilon^2}{4F_n^2} \left(\theta - \frac{2}{1+\varepsilon^2} \beta \right)^2 + \dots \quad (76)$$

と展開されるから、(70) 式ならびに (72) 式の積分を停留位相法を用いて評価すると、 $C_{Y_w}^{(2)}$ は第1項と第2項が斜航角 β に関してともに $O(\beta)$ となって釣り合った結果として生ずるのに対し、 $C_{X_w}^{(2)}$ は第1項が $O(1)$ の直進成分となり第2項が $O(\beta^2)$ となって無視できるから、変動成分 $C_{Y_w}^{(2)}$, $C_{X_w}^{(2)}$ に対する漸近的な表示式として

$$C_{Y_w}^{(2)} \sim \lim_{\substack{F_n \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} 2\beta F_n^7 \varepsilon^2 \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} (\tilde{D}^{(0)})^2 \Big]_{\theta=0} \quad (77)$$

$$\times \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon^2}} \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (77)$$

$$C_{X_w}^{(2)} \sim \lim_{\substack{F_n \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} 2F_n^7 \varepsilon^2 (\tilde{D}^{(0)})^2 \Big]_{\theta=0} \sqrt{\frac{2\pi}{1+\varepsilon^2}} \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (78)$$

を得る。ここに、 $\tilde{D}^{(0)}$ の値が $\theta=\theta_1$ の停留点ではなく $\theta=0$ の点となっているのは、2.2 節で求めた回転楕円体や楕円柱の $\tilde{D}^{(0)}$, $\tilde{D}^{(1)}$ が

$$(\tilde{D}^{(0)})^2 + 2\beta \tilde{D}^{(0)} \tilde{D}^{(1)} \Big]_{\theta=\frac{2}{1+\varepsilon^2}\beta} = (\tilde{D}^{(0)})^2 \Big]_{\theta=0} + O(\beta^2) \quad (79)$$

となるからである。 $C_{Y_w}^{(2)}$, $C_{X_w}^{(2)}$ は正弦関数の位相が F_n^2 の逆数に比例することから、造波横力、造波抵抗曲線のハンプ・ホローを表わすものであり、フルード数が低くなるほど、それらは激しく変動する。 $C_{Y_w}^{(2)}$, $C_{X_w}^{(2)}$ の変動幅は $\tilde{D}$ 関数のうち直進成分 $\tilde{D}^{(0)}$ の2乗の $\theta=0$ 言い換えると $\eta_1=0$ の船尾端での値によって決定され、 $\tilde{D}^{(1)}$ に関係である。このことから、 $C_{Y_w}^{(2)}$ の発生原因は、船が斜航して波の伝播方向 θ が β だけずれたことにより、波の干渉具合が直進中のそれと変わったためであるといえる。

3 計算例と考察

前章では、水線面が楕円形状を呈する場合について、造波に基づく横力ならびに抵抗を求める式を導いた。本節では、これら半没回転楕円体と直立楕円柱に働く造波横力ならびに造波抵抗の細長比 ε に対する依存性を明らかにするために実際の計算を行う。造波横力係数 C_{Y_w} 、造波抵抗係数 C_{X_w} を3つのパラメータ F_n , β , ε の依存性を分離して

$$C_{Y_w} = \beta F_n^6 \tilde{Y}_1(\varepsilon) + \beta F_n^7 \sqrt{\pi} \tilde{Y}_2(\varepsilon) \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (80)$$

$$C_{X_w} = F_n^6 \tilde{X}_1(\varepsilon) + F_n^7 \sqrt{\pi} \tilde{X}_2(\varepsilon) \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (81)$$

と書くことにすれば、 C_{Y_w} の第1、第2項がそれぞれ $C_{Y_w}^{(1)}$, $C_{Y_w}^{(2)}$ であり、同様に C_{X_w} の第1、第2項が $C_{X_w}^{(1)}$, $C_{X_w}^{(2)}$ に対応する。 $\tilde{Y}_1$, $\tilde{Y}_2$ および $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ は、すべて細長比 ε のみに依存する関数であり、抵抗については回転楕円体、楕円柱ともに、馬場⁹⁾、丸尾⁸⁾によって先に取り扱われているが、 $\tilde{X}_1$ に対する最終的な解の表示は積分表示のままであることでもあり、本節では ε に関する漸近挙動を明らかにするため、これらの解析的な表示式を求めることを考える。

3.1 半没回転楕円体の場合

造波横力、造波抵抗の F_n に関する平均成分は、(56)、(57) 式の $\tilde{D}^{(0)}$, $\tilde{D}^{(1)}$ を求めた (69)、(71) 式に代入して整理すれば

$$\bar{Y}_1 = \frac{4}{\varepsilon^3}$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \left[A_0^5 \left(4\sigma^3 - 4\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \sin^4 \theta \cos^3 \theta \right. \\ \times \{ 2(A_1 + \varepsilon A_0) \sin^2 \theta - (4A_1 + \varepsilon A_0) \cos^2 \theta \} \\ + 2A_0^3 \left(2\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \sin^2 \theta \cos^3 \theta \\ \times \{ 2(A_1 + \varepsilon A_0) \sin^2 \theta - (2A_1 + \varepsilon A_0) \cos^2 \theta \} \\ \left. + A_0 \frac{1}{\sigma} \cos^3 \theta \{ 2(A_1 + \varepsilon A_0) \sin^2 \theta - \varepsilon A_0 \cos^2 \theta \} \right] d\theta \quad (82)$$

$$\bar{X}_1 = \frac{4}{\varepsilon^2}$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \left[A_0^6 \left(4\sigma^3 - 4\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \sin^4 \theta \cos^5 \theta \right. \\ + 2A_0^4 \left(2\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \sin^2 \theta \cos^5 \theta \\ \left. + A_0^2 \frac{1}{\sigma} \cos^5 \theta \right] d\theta \quad (83)$$

となり、これは解析的積分可能だから、積分変数 θ を

$$\sin \theta = u \quad (84)$$

と変数変換し、付録で説明されている

$$\left. \begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^1 u^m \sigma^n du \\ \text{ただし, } \sigma &= \sqrt{1 - c^2 u^2} \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

のような楕円の半共焦点間距離 c の関数 $I_{m,n}$ を導入すれば

$$\bar{Y}_1 = -\frac{4}{\varepsilon^3}$$

$$\times \left[A_0^5 \left\{ \begin{aligned} &(4A_1 + \varepsilon A_0)(4I_{4,3} - 4I_{4,1} + I_{4,-1}) \\ &- (10A_1 + 4\varepsilon A_0)(4I_{6,3} - 4I_{6,1} + I_{6,-1}) \\ &+ (6A_1 + 3\varepsilon A_0)(4I_{8,3} - 4I_{8,1} + I_{8,-1}) \end{aligned} \right\} \right. \\ + 2A_0^3 \left\{ \begin{aligned} &(2A_1 + \varepsilon A_0)(2I_{2,1} - I_{2,-1}) \\ &- (6A_1 + 4\varepsilon A_0)(2I_{4,1} - I_{4,-1}) \\ &+ (4A_1 + 3\varepsilon A_0)(2I_{6,1} - I_{6,-1}) \end{aligned} \right\} \\ \left. + A_0 \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon A_0 I_{0,-1} - (2A_1 + 4\varepsilon A_0)I_{2,-1} \\ &+ (2A_1 + 3\varepsilon A_0)I_{4,-1} \end{aligned} \right\} \right] \quad (86)$$

$$\bar{X}_1 = \frac{4}{\varepsilon^2}$$

$$\times \left[A_0^6 \left\{ \begin{aligned} &(4I_{4,3} - 4I_{4,1} + I_{4,-1}) \\ &- 2(4I_{6,3} - 4I_{6,1} + I_{6,-1}) \\ &+ (4I_{8,3} - 4I_{8,1} + I_{8,-1}) \end{aligned} \right\} \right. \\ + 2A_0^4 \left\{ \begin{aligned} &(2I_{2,1} - I_{2,-1}) - 2(I_{4,1} - I_{4,-1}) \\ &+ (2I_{6,1} - I_{6,-1}) \end{aligned} \right\} \\ \left. + A_0^2 \{ I_{0,-1} - 2I_{2,-1} + I_{4,-1} \} \right] \quad (87)$$

と表示できる。ここに $I_{m,3}$ ($m=4, 6, 8$) は、次節に示

す直立楕円柱の場合に対応する項である。また、 $\bar{Y}_1$ に対する表示式の中括弧内において、 $I_{m,n}$ に A_1 が掛かった項が基礎流場自身の斜航影響を、 εA_0 が掛かった項が波の伝播方向の斜航影響を表わしている。

変動成分 $\bar{Y}_2, \bar{X}_2$ については、(56) 式より

$$\bar{D}^{(0)}]_{\theta=0} = \frac{A_0}{\varepsilon^2} \quad (88)$$

であるから、(77), (78) 式に代入すれば直ちに

$$\bar{Y}_2 = 2 \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon^2}} \quad (89)$$

$$\bar{X}_2 = 2 \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon^2}} \quad (90)$$

を得る。

$\varepsilon \rightarrow 1$ のとき、すなわち回転楕円体が球に縮退する場合を考える。関数 $I_{m,n}$ は、 $\varepsilon \rightarrow 1$ のとき

$$I_{m,n} \underset{\varepsilon \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{m+1} \quad (91)$$

となり、 $\varepsilon \rightarrow 1$ での極限では n に無関係になるという性質を持っている。したがって $\bar{Y}_1, \bar{X}_1$ のうち $I_{m,n}$ を含む小括弧でくくられた量はすべて $1/(m+1)$ になることと、また (30) 式より A_0, A_1 がともに $3/2$ になることを考慮すれば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{aligned} \right\} \underset{\varepsilon \rightarrow 1}{\sim} 0 \quad (92)$$

となり、斜航する半没球の場合には造波に基づく横力を受けないという当然の結果を得る。しかし、このことは物理的には当然としても解析上ではすでに述べたように、造波横力には基礎流場自身と波の伝播方向に斜航影響を受けているから、この結果はこれらを正確に考慮したことが反映された結果であると考えられる。一方、造波抵抗は

$$\bar{X}_1 \underset{\varepsilon \rightarrow 1}{\sim} \frac{633}{70} \doteq 9.04 \quad (93)$$

$$\bar{X}_2 \underset{\varepsilon \rightarrow 1}{\sim} \frac{9}{2} \quad (94)$$

となり、馬場⁷⁾が求めた直進中の解に一致する。

一方、 $\varepsilon \rightarrow 0$ での挙動は、(31) 式より A_0 が 1, A_1 が 2ε になるが、関数 $I_{m,n}$ が付録に示すような有限値を取ることから、 $\bar{Y}_1, \bar{X}_1$ の積分項はともに消失することではなく、

$$\bar{Y}_1 \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{17\pi}{128\varepsilon^2} \doteq \frac{0.417}{\varepsilon^2} \quad (95)$$

$$\bar{X}_1 \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{105\pi}{128\varepsilon^2} \doteq \frac{2.58}{\varepsilon^2} \quad (96)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_2 \\ \bar{X}_2 \end{aligned} \right\} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon^2} \quad (97)$$

となり、細長比 ε に関して全て $1/\varepsilon^2$ のオーダーとなる。このときの $\bar{Y}_1$ は、基礎流場と波の伝播方向の両斜航影響のオーダーが、 ε に関して釣り合った結果として生じ

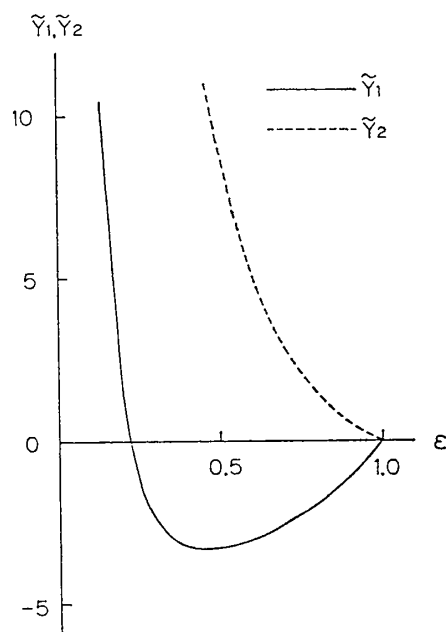


Fig. 4 Lateral force C_{Y_w} for the prolate spheroids with the slenderness ratio ϵ , where $C_{Y_w} = \beta F_n^6 \tilde{Y}_1$

$$+ \beta F_n^7 \sqrt{\pi} \tilde{Y}_2 \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

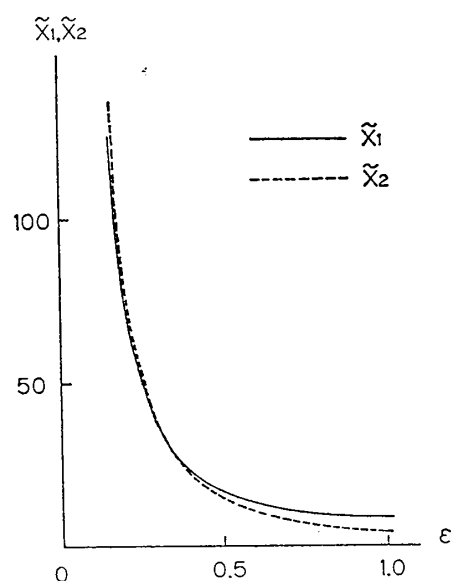


Fig. 5 Wave making resistance C_{X_w} for the prolate spheroids with the slenderness ratio ϵ , where $C_{X_w} = F_n^6 \tilde{X}_1$

$$+ F_n^7 \sqrt{\pi} \tilde{X}_2 \sin\left(\frac{1}{F_n^2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

ている。

Fig. 4 に回転楕円体の場合の造波横力の βF_n^6 に比例する平均成分の係数 $\tilde{Y}_1$ を実線で、また、変動成分の係数 $\tilde{Y}_2$ を点線で示す。 $\tilde{Y}_1$ は $\epsilon=0.22$ の辺りを境とし、それより大きな ϵ に対しては負の値を、小さな ϵ に対し

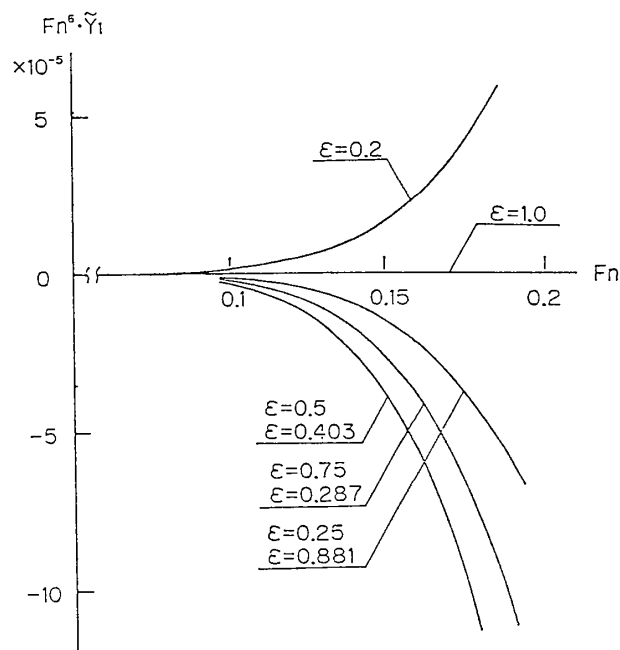


Fig. 6 Averaged lateral force for the prolate spheroids with the various slenderness ratio ϵ .

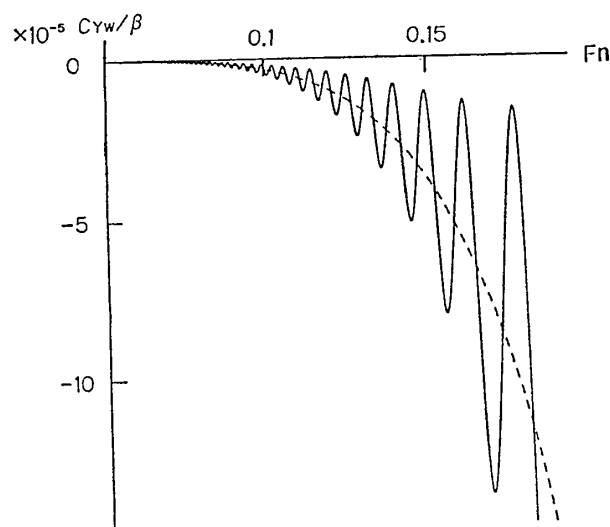


Fig. 7 Lateral force C_{Y_w} for the prolate spheroid of $\epsilon=0.5$

ては正の値をとっている。 ϵ が大きい場合は造波横力の方向は三次元剥離に基づく横力とは反対向き、小さい場合には同じ方向を向くことになるが、造波横力の値としては Fig. 7 などからも分かるように高々 10^{-4} の程度であり、剥離に基づく横力に比べ桁ほど小さい。また、 $\epsilon=0.45$ の辺りで負のピークを持ち、 $\epsilon \rightarrow 0$ のときには (95) 式のように $1/\epsilon^2$ のオーダーで発散する。 $\epsilon \rightarrow 0$ の発散傾向は Fig. 5 に示した造波抵抗の場合にも見られ、 $\tilde{X}_1$ はやはり (96) 式のように $1/\epsilon^2$ のオーダーで発散する。造波抵抗がこのような挙動を示すことはないと考えられるから、造波横力に対しても $\epsilon=0.2 (L/B=5)$ 程度の通常船型に対する適用可能性については疑問視せ

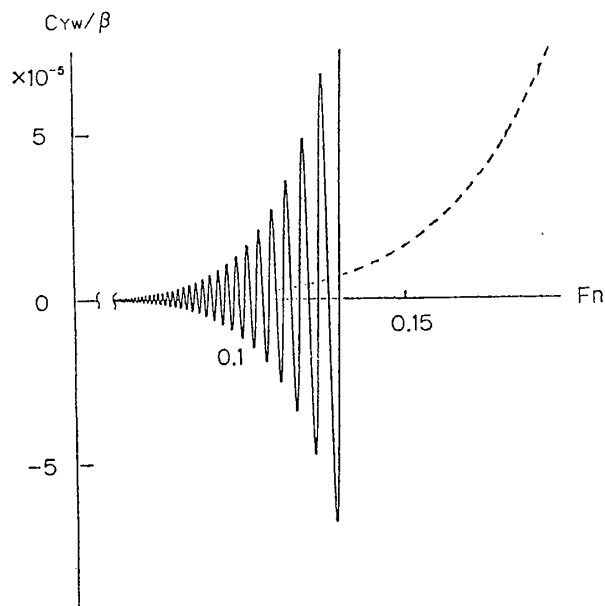


Fig. 8 Lateral force C_{Y_w} for the prolate spheroid of $\varepsilon=0.2$

ざるを得ない。このような問題が生ずるのは、造波横力を推定する問題に低速造波理論を適用することに無理があるというわけではなく、(45) 式を部分積分することにより振幅関数の漸近挙動を求めたことに起因すると考えられる。これは (45) 式で定義した $\tilde{H}(\theta)$ のうち被積分関数となっている $e^{i\psi(\theta)}$ の項の位相関数すなわち (51) 式の $\Omega(\eta)$ が最も造波横力、造波抵抗に効く船首尾端で $O(\varepsilon^2/F_n^2)$ となり、一回部分積分するごとに $\tilde{H}(\theta)$ のオーダーが F_n^2/ε^2 だけ変わることを利用した展開の F_n/ε の最低次の項として振幅関数が得られているのに対し、本章では F_n を固定して各係数の ε に関する挙動を論じたため $\varepsilon \rightarrow 0$ で特異性を生じた結果である。したがって、造波横力、造波抵抗を求める際には、少なくとも $\varepsilon \rightarrow 0$ の挙動に関する限り、直接数値積分する方法などの合理的手法を用いて振幅関数を求めることが必要である。

Fig. 6 は色々の細長比をとる回転楕円体の造波横力の平均成分をフルード数をベースにプロットしたものである。Fig. 4 でも分かるように $\tilde{Y}_1$ は極値を持つから、異なる ε に対しても同一の $\tilde{Y}_1$ をとることがある。しかし、 $\tilde{Y}_1$ が極値を持つことは $\varepsilon \rightarrow 0$ での発散も原因していると考えられ、数値計算を行い確かめる必要がある。Fig. 7 は一例として $\varepsilon=0.5$ の比較的細長比の大きな回転楕円体の造波横力係数を F_n に対して示したものであり、実線で示す C_{Y_w} の値はかなり大きく変動するものの、低速では点線の平均成分に従い負の値を保っている。しかし、Fig. 4 から分かるように ε が小さいとき $\tilde{Y}_2$ の値は $\tilde{Y}_1$ に比べてかなり大きな値を持つから、Fig. 8 に示した $\varepsilon=0.2$ の場合には点線で示す平均成分

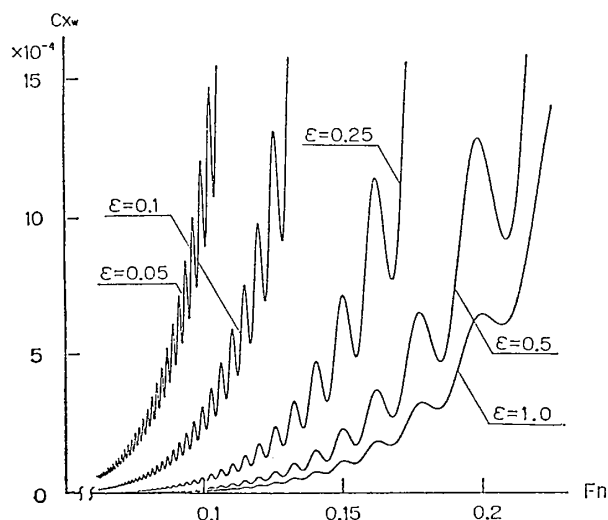


Fig. 9 Wave making resistance C_{X_w} for the prolate spheroid with the various slenderness ratio ε .

は正の値をとるものの、実線の C_{Y_w} はほとんど変動成分に支配され正負に激しく変動し、漸近展開は破綻していると考えられる。Fig. 9 には横力との比較の意味で、種々の ε に対する回転楕円体の造波抵抗曲線を示した。抵抗は横力と違って、Fig. 5 から分かるように、実線の $\tilde{X}_1$ と点線の $\tilde{X}_2$ が ε の全域に渡ってほぼ同じ値を持つため、ある程度小さな ε に対しても妥当な C_{X_w} 曲線が得られるようである。

3.2 直立楕円柱の場合

回転楕円体では幅・喫水比が常に 2 で一定のため、喫水の影響を見るために、深喫水船のモデルとして直立楕円柱について計算する。

計算は回転楕円体の場合と同様に行えばよく、 $\tilde{Y}_1, \tilde{X}_1$ は

$$\tilde{Y}_1 = \frac{16(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon^3} \times \int_0^{\pi/2} \sigma^3 \sin^4 \theta \cos^3 \theta \left\{ \frac{2(1+\varepsilon) \sin^2 \theta}{-(4+\varepsilon) \cos^2 \theta} \right\} d\theta \quad (98)$$

$$\tilde{X}_1 = \frac{16(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon^2} \int_0^{\pi/2} \sigma^3 \sin^4 \theta \cos^5 \theta d\theta \quad (99)$$

となるから、

$$\tilde{Y}_1 = -\frac{16(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon^3} \left[\frac{(4+\varepsilon)I_{4,3} - (10+4\varepsilon)I_{6,3}}{(6+3\varepsilon)I_{8,3}} \right] \quad (100)$$

$$\tilde{X}_1 = \frac{16(1+\varepsilon)^6}{\varepsilon^2} [I_{4,3} - 2I_{6,3} + I_{8,3}] \quad (101)$$

と表示できる。ここに $\tilde{Y}_1$ の大括弧内において、 $I_{m,3}$ に ε の掛かる項が波の伝播方向の斜航影響を、他の項が基礎流場自身の斜航影響を表わしている。

また、変動成分については、(58) 式より、

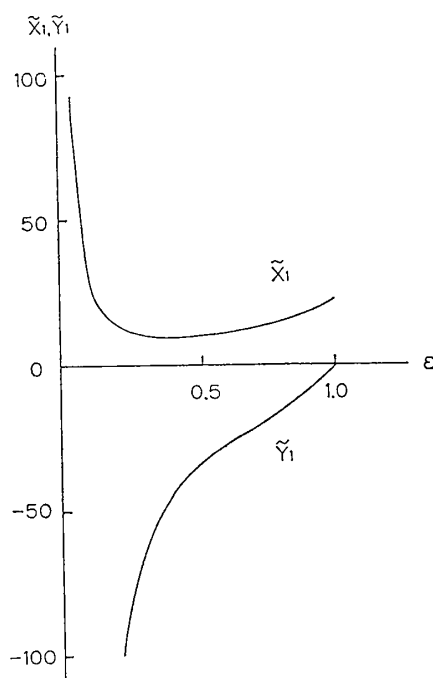


Fig. 10 Lateral force C_{Yw} and wave making resistance C_{Xw} for the elliptic cylinder with the slenderness ratio ϵ , where $C_{Yw} = \beta F_n^6 \tilde{Y}_1$ and $C_{Xw} = F_n^6 \tilde{X}_1$.

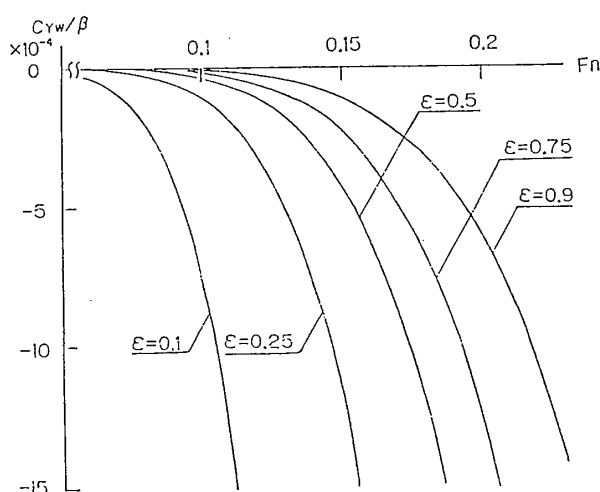


Fig. 11 Lateral force C_{Yw} for the elliptic cylinder with the various slenderness ratio ϵ .

$$\tilde{D}^{(0)}|_{\theta=0}=0 \quad (102)$$

であるから

$$\tilde{Y}_2 = \tilde{X}_2 = 0 \quad (103)$$

となり、楕円柱の場合の造波横力曲線ならびに造波抵抗曲線には、ハンプ・ホローは生じない。

$\epsilon \rightarrow 1$ での $\tilde{Y}_1, \tilde{X}_1$ の漸近挙動は、

$$\tilde{Y}_1 \underset{\epsilon \rightarrow 1}{\sim} 0 \quad (104)$$

$$\tilde{X}_1 \underset{\epsilon \rightarrow 1}{\sim} \frac{8129}{315} \doteq 26.0 \quad (105)$$

となり、斜航する直立円柱に関しても、造波に基づく横力は受けず、抵抗は馬場⁷⁾が求めた直進中の解に一致する。

一方、 $\epsilon \rightarrow 0$ での挙動は、 $\tilde{Y}_1, \tilde{X}_1$ とともに積分項は消失せず

$$\tilde{Y}_1 \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} -\frac{9\pi}{64\epsilon^3} \doteq -\frac{0.442}{\epsilon^3} \quad (106)$$

$$\tilde{X}_1 \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{7\pi}{128\epsilon^2} \doteq \frac{0.172}{\epsilon^2} \quad (107)$$

となる。

Fig. 10は楕円柱の場合の $\tilde{Y}_1$ と $\tilde{X}_1$ を示したものである。楕円柱に対する $\tilde{X}_1$ はすでに馬場⁹⁾によって示されたものであるが、 $\tilde{Y}_1, \tilde{X}_1$ の ϵ に関する依存性を示すために参考資料として揚げたものである。 $\tilde{Y}_1$ は回転楕円体の場合と異なり、 ϵ の全域にわたって負の値をとり、造波横力は常に通常の揚力とは反対の方向に生ずる。また、 $\epsilon \rightarrow 0$ のときには $\tilde{Y}_1$ はやはり発散するが、その大きさは $1/\epsilon^3$ であるから回転楕円体の場合に比べて $1/\epsilon$ だけ大きい。この違いは $\tilde{D}^{(0)}$ は $1/\epsilon^2$ で回転楕円体の場合と同じであるが、 $\tilde{D}^{(1)}$ の方が $1/\epsilon^3$ となり $1/\epsilon$ だけ大きくなっていることによるものである。したがって、 $\tilde{Y}_1$ に $\tilde{D}^{(1)}$ が強く影響することから、 ϵ が小さいときの楕円柱のような深喫水船の場合の造波横力には、波の伝播方向の斜航影響よりも基礎流場の斜航影響の方が支配的であると考えられ、回転楕円体のような浅喫水船の場合とは発生原因が異なる。一方、 $\tilde{X}_1$ は回転楕円体の場合と異なり $\epsilon=0.4$ の辺りで極小値を持つが、 $\tilde{X}_1$ が $\tilde{Y}_1$ と違って $\tilde{D}^{(0)}$ に関係しないことから、 $\epsilon \rightarrow 0$ での挙動は回転楕円体と同様の事情により発散する。ただ、(107) 式の $1/\epsilon^2$ にかかる係数は回転楕円体の場合より一桁ほど小さい。Fig. 11 は色々の ϵ について楕円柱の造波横力曲線を F_n ベースに示したものであり、 $\tilde{Y}_2$ が0であるから回転楕円体のようなフルード数による変動はない。

4 結 言

斜航する船に働く横力推定の問題において、造波による横力も抵抗と同じように、低速造波理論によって導き得ることを示し、横力も斜航角 β に関する1次の項では、抵抗と同様、フルード数を F_n としたとき βF_n^6 の平均項に βF_n^7 の変動項が乗った形で漸近解が求まることを示した。また、船型として半没回転楕円体と喫水の影響を見るために直立楕円柱の2つを取り挙げ、造波横力の特性を明らかにした結果、次のような結論を得た。

(1) 造波による横力の発生を、振幅関数のレベルから論じた結果、造波横力が、基礎流場自身と波の伝播方向の2つの斜航影響によって生ずることが明らかとなった。

(2) βF_n^6 に比例する造波横力は、通常の揚力とは一般的には逆向きに生ずることが分かった。しかし、細長比 ε が小さいときには、通常の揚力と同じ方向を向くこともあることが分かった。

(3) 振幅関数の漸近解を求める手法として、 F_n に関して最低次の項を取る際に、馬場に従って x で先に部分積分しても、丸尾に従って y で先に部分積分しても、その後の積分に停留位相法を用いる限り、斜航中の場合も同一の結果を与えることを示した。しかし、この手法を用いて造波横力の細長比 ε に対する依存性について論ずると、 ε が大きいときには妥当な結果を与えるものの、 ε が小さいときには、振幅関数を部分積分し停留位相法を用いた本論の解析法には問題があることが分かった。この問題の解決法については今後の課題とする。

本稿を終えるに当たり、図面作成等に多大な御援助を頂いた田中寿夫氏（現在：日立造船(株)技術研究所）はじめ、大阪大学・推進性能研究室諸氏に御礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 不破 健：斜行中の船体にはたらく流体力について，日本造船学会論文集，第 134 号 (1973)。
- 2) 松村清重，田中一朗，沖 俊英，岸 進：細長体の非線型揚力特性について——境界層剥離と渦層の挙動——，日本造船学会論文集，第 154 号 (1983)。
- 3) 松本憲洋，末光啓二：操縦運動時に船体に働く流体力，関西造船協会誌，第 190 号 (1983)。
- 4) Hanaoka, T.: Non-Uniform Theory of Wave Making on Low Aspect Ratio Lifting Surface, Proceedings of the 10th Japan National Congress for Appl. Mech., (1960)。
- 5) 野中晃二：斜航する船体に働く横力への自由表面影響，日本造船学会論文集，第 138 号 (1975)。
- 6) Ogilvie, T. F.: Wave Resistance—The Low Speed Limit—, Rep. No. 002, Dept. of Nav. Arch. & Mar. Eng., Univ. of Michigan, Ann Arbor (1968)。
- 7) Baba, E. & Takekuma, K.: A Study on Free-Surface Flow around Bow of Slowly Moving Full Forms, Jour. of Soc. Nav. Arch. Japan, Vol. 137 (1975)。
- 8) Maruo, H.: Wave Resistance of a Ship with Finite Beam at Low Froude Numbers, Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National Univ., Vol. 26 (1977)。
- 9) Baba, E.: Wave Resistance of Ships in Low Speed, Mitsubishi Technical Bulletin, No. 109, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. (1976)。
- 10) 西山哲男：斜行する没水回転楕円体並に水上船舶の横抵抗について，造船協会論文集，第 85 号 (1952)。

- 11) Maruo, H. & Suzuki, K.: Wave Resistance of a Ship of Finite Beam Predicted by the Low Speed Theory, Jour. of Soc. Nav. Arch. Japan, Vol. 142 (1977)。
- 12) Wehausen, J. V. & Laitone, E. V.: Surface Waves, Encyclopedia of Physics, Vol. IX, Fluid Dynamics III, Springer Verlag, page 573 (1960)。

付 録 関 数 $I_{m,n}$

ここでは、3 章で導入した関数 $I_{m,n}$ の細長比 ε あるいは半共焦点間距離 c に関する陽な表示式を、(i) $n=3$, $m=4, 6, 8$ (ii) $n=1$, $m=2, 4, 6, 8$ (iii) $n=-1$, $m=0, 2, 4, 6, 8$ について示し、それぞれの $\varepsilon \rightarrow 0$ ならびに $\varepsilon \rightarrow 1$ での漸近挙動も明記した。

関数 $I_{m,n}$ は

$$I_{m,n} = \int_0^1 u^m \sqrt{1-c^2 u^{2n}} du \quad \left. \vphantom{\int_0^1} \right\} \quad (A-1)$$

ただし、 $c = \sqrt{1-\varepsilon^2}$

で定義されており、これを解析的に積分して得られた結果は以下のとおりである。

i) $n=3$

$$I_{4,3} = -\frac{1}{16} \left(2 + \frac{1}{c^2} \right) \frac{\varepsilon^5}{c^2} + \frac{1}{64} \cdot \frac{\varepsilon^3}{c^4} + \frac{3}{128} \cdot \frac{\varepsilon}{c^4} + \frac{3}{128} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^5} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{256} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{5} \quad (A-2)$$

$$I_{6,3} = -\frac{1}{160} \left(16 + \frac{10}{c^2} + \frac{5}{c^4} \right) \frac{\varepsilon^5}{c^2} + \frac{1}{128} \cdot \frac{\varepsilon^3}{c^6} + \frac{3}{256} \cdot \frac{\varepsilon}{c^6} + \frac{3}{256} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^7} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{512} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{7} \quad (A-3)$$

$$I_{8,3} = -\frac{1}{1920} \left(160 + \frac{112}{c^2} + \frac{70}{c^4} + \frac{35}{c^6} \right) \frac{\varepsilon^5}{c^2} + \frac{7}{1536} \cdot \frac{\varepsilon^3}{c^8} + \frac{7}{1024} \cdot \frac{\varepsilon}{c^8} + \frac{7}{1024} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^9} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{7}{2048} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{9} \quad (A-4)$$

ii) $n=1$

$$I_{2,1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^3}{c^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^3} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{16} \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{3} \quad (A-5)$$

$$I_{4,1} = -\frac{1}{24} \left(4 + \frac{3}{c^2} \right) \frac{\varepsilon^3}{c^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\varepsilon}{c^4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^5} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{32} \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{5} \quad (A-6)$$

$$I_{6,1} = -\frac{1}{192} \left(24 + \frac{20}{c^2} + \frac{15}{c^4} \right) \frac{\varepsilon^3}{c^2} + \frac{5}{128} \cdot \frac{\varepsilon}{c^6} + \frac{5}{128} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^7} \\ \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{5}{256} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{7} \quad (A-7)$$

$$I_{8,1} = -\frac{1}{1920} \left(192 + \frac{168}{c^2} + \frac{140}{c^4} + \frac{105}{c^6} \right) \frac{\varepsilon^3}{c^2}$$

$$+\frac{7}{256} \cdot \frac{\varepsilon}{c^8} + \frac{7}{256} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^9}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{7}{512} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{9} \quad (\text{A-8})$$

iii) $n=-1$

$$I_{0,-1} = \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} 1 \quad (\text{A-9})$$

$$I_{2,-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^3}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{4} \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{3} \quad (\text{A-10})$$

$$I_{4,-1} = -\frac{1}{8} \left(2 + \frac{3}{c^2} \right) \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^5}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{16} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{5} \quad (\text{A-11})$$

$$I_{6,-1} = -\frac{1}{48} \left(8 + \frac{10}{c^2} + \frac{15}{c^4} \right) \frac{\varepsilon}{c^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^7}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{5}{32} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{7} \quad (\text{A-12})$$

$$I_{8,-1} = -\frac{1}{384} \left(48 + \frac{56}{c^2} + \frac{70}{c^4} + \frac{105}{c^6} \right) \frac{\varepsilon}{c^2}$$

$$+\frac{35}{128} \cdot \frac{\text{Sin}^{-1} c}{c^9}$$

$$\sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{35}{256} \pi \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{9} \quad (\text{A-13})$$

このように関数 $I_{m,n}$ の挙動は, $\varepsilon \rightarrow 1$ では n には無関係に

$$I_{m,n} \sim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{1}{m+1} \quad (\text{A-14})$$

となるのに対し, $\varepsilon \rightarrow 0$ では

$$I_{m,n} \sim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(m-1)!!n!!}{(m+n+1)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし, } j!! &= \begin{cases} j(j-2)\cdots 3 \cdot 1 & [j: \text{奇数}] \\ j(j-2)\cdots 4 \cdot 2 & [j: \text{偶数}] \end{cases} \\ 0!! &= (-1)!! = 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-15})$$

である。